Краткие сообщения по физике № 10 октябрь 1971

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕНЕРАЦИИ НА НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОЙ ЛИНИИ

К. В. Владимирский

В работе исследуется устойчивость стационарных режимов спиновых генераторов – электронных автоколебательных систем, частота генерации которых определяется магнитным резонансом в веществе /1/. Поскольку уравнения, подобные уравнениям магнитного резонанса, могут быть использованы для описания любой двухуровневой системы /2/, задача имеет много общего с исследованием устойчивости генерации мазеров. Вопросы устойчивости изучены в ряде работ. В оптимальном режиме, когда можно считать, что фаза поля в резонаторе безынерционно следует за фазой поляризации вещества, теория дает устойчивость при любых уровнях возбуждения (уровнях радиочастотного поля в резонаторе) /3/. На опыте в указанном случае далеко не всегда наблюдаются устойчивые режимы. В настоящей статье исследуется одна из возможных причин неустойчивости – неоднородное уширение линии рабочего вещества.

Мы будем считать, что процессы в веществе описываются уравнениями Блоха /4/. Резонансные частоты в различных частях рабочего вещества будем считать неодинаковыми за счет неоднородности поляризующего поля $H_z = H_0$. Так же неоднородна по объему будет ядерная намагниченность $\{M_x, M_y, M_z\}$. Распределение поля по объему будем характеризовать функцией $g(h)$, где $h = \gamma \Delta H_0 T_2$, $\int g(h)dh = 1$, $\int hg(h)dh = 0$.

Уравнения, описывающие магнитный резонанс в веществе, взаимодействующем с резонатором, подробно рассматривались в связи с изучением радиационного затухания и радиационной неустойчивости /5/. Для наших целей достаточны уравнения, соответствующие установившимся значениям поля в резонаторе. Тогда для точной настройки резонатора на частоту линии мы получим

$$H_x^+ = k\overline{M_y^+}, \quad H_y^+ = -k\overline{M_x^+}. \tag{1}$$

Здесь H_x^+, H_y^+ – компоненты циркулярно поляризованного поля в резонаторе, $\overline{M_x^+}$, $\overline{M_y^+}$ – значения циркулярных компонент ядерной намагниченности, усредненные по объему рабочего вещества с весом $g(h)$, k – постоянная, включающая все геометрические факторы и коэффициент усиления радиочастотного тракта спинового генератора. В наших обозначениях радиационному затуханию соответствуют отрицательные, регенерации – положительные значения k.

Подставляя соотношения (1) в уравнения Блоха, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} + p - hq - æ\bar{p}r = 0, \\ &\frac{dq}{dt} + q + hp - æ\bar{q}r = 0, \\ &\frac{dr}{dt} + r + æ(\bar{p}p + \bar{q}q) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $p = M_x^+/M_0$, $q = M_y^+/M_0$, $r = M_z/M_0$,

чертой обозначены те же величины усредненные с весом $g(h)$, $æ$ – безразмерный коэффициент усиления, пропорциональный k, за единицу времени выбраны времена релаксации $T_1 = T_2$. Система (2) имеет стационарное решение, соответствующее решению уравнений Блоха для "медленного прохождения" /4/. В лабораторной системе координат стационарное решение представляет синусоидальные колебания с постоянной амплитудой и с частотой, соответствующей центру тяжести распределения поля H_0 в рабочем веществе.

Для исследования устойчивости стационарного решения удобно перейти к системе (вообще говоря, бесконечной) обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируя правую и левую части уравнений (2) с весом $g(h)$, $hg(h)$, $h^2g(h)$,... Получающаяся таким образом система уравнений для моментов величин p,q,r удовлетворяет условиям сходимости, так как недиагональные коэффициенты системы при разумных предположениях относительно вида функции $g(h)$ зависят от номера уравнения, как $(n + 1)^{-1}$. Можно думать, таким образом, что исследуя простейшие конечные системы для моментов величин p,q,r, мы получим результаты, качественно правильные также и для точных уравнений.

Конечные, обрывающиеся системы, для которых проведены конкретные исследования устойчивости, получены путем замены непрерывного распределения $g(h)$ функциями

$$g_1(h) = \frac{1}{2}\left[f(h + \delta) + f(h - \delta)\right] \qquad (3)$$

и

$$g_2(h) = \frac{\alpha}{2} f\left(h + \frac{\delta}{\alpha^{1/2}}\right) + (1 - \alpha)f(h) + \frac{\alpha}{2} f\left(h - \frac{\delta}{\alpha^{1/2}}\right), \qquad (4)$$

где $f(x)$ - дельта-функция Дирака, δ^2 - определяющий ширину распределения момент второго порядка, α - - постоянная.

Для распределения (3) простые вычисления дают систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} + x - \delta y' - \varkappa xz = 0,\\
&\frac{dx'}{dt} + x' - \delta y - \varkappa xz' = 0,\\
&\frac{dy}{dt} + y + \delta x' - \varkappa yz = 0,\\
&\frac{dy'}{dt} + y' + \delta x - \varkappa yz' = 0,\\
&\frac{dz}{dt} + z + \varkappa(x^2 + y^2) = 1,\\
&\frac{dz'}{dt} + z' + \varkappa(xx' + yy') = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Здесь x, y, z – средние значения компонент ядерной намагниченности, x', y', z' – моменты первого порядка.

Система уравнений (5) имеет семейство стационарных решений, отличающихся фазой. Мы выпишем здесь одно из них

$$\begin{gathered}
x_0' = y_0 = z_0' = 0, \quad \varkappa x_0 = s, \quad \varkappa y_0' = -\delta s,\\
\varkappa z_0 = 1 + \delta^2, \quad \varkappa = 1 + s^2 + \delta^2.
\end{gathered} \qquad (6)$$

Здесь s – параметр, определяющий силу радиочастотного поля в стационарном состоянии.

Для исследования устойчивости положим $x = x_0 + z_1$, $y' = y_0' + z_2$, $z = z_0 + z_3$, $x' = z_4$, $y = z_5$, $z' = z_6$.

В новых переменных получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_1}{dt} = \delta^2 z_1 + \delta z_2 + s z_3 + \varkappa z_1 z_3,\\
&\frac{dz_2}{dt} = -\delta z_1 - z_2 + \varkappa z_5 z_6,
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_3}{dt} &= -2sz_1 \qquad\qquad - z_3 - \varkappa(z_1^2 + z_5^2),\\
\frac{dz_4}{dt} &= -z_4 + \delta z_5 + sz_6 + \varkappa z_1 z_6,\\
\frac{dz_5}{dt} &= -\delta z_4 + \delta^2 z_5 \qquad\quad + \varkappa z_3 z_5,\\
\frac{dz_6}{dt} &= -sz_4 + \delta s z_5 - z_6 - \varkappa(z_1 z_4 + z_2 z_5).
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Для определения области устойчивости достаточно, используя теорему Андронова – Витта /6/, исследовать соответствующую линеаризованную систему. Эта система распадается на две подсистемы, охватывающие, соответственно, переменные z_1, z_2, z_3 и z_4, z_5, z_6. Для первой подсистемы получаем характеристическое уравнение

$$(\lambda + 1)\left[\lambda^2 + (1 - \delta^2)\lambda + 2s^2\right] = 0, \qquad (8)$$

для второй

$$\lambda\left[\lambda^2 + (2 - \delta^2)\lambda + 1 + s^2 - \delta^2\right] = 0. \qquad (9)$$

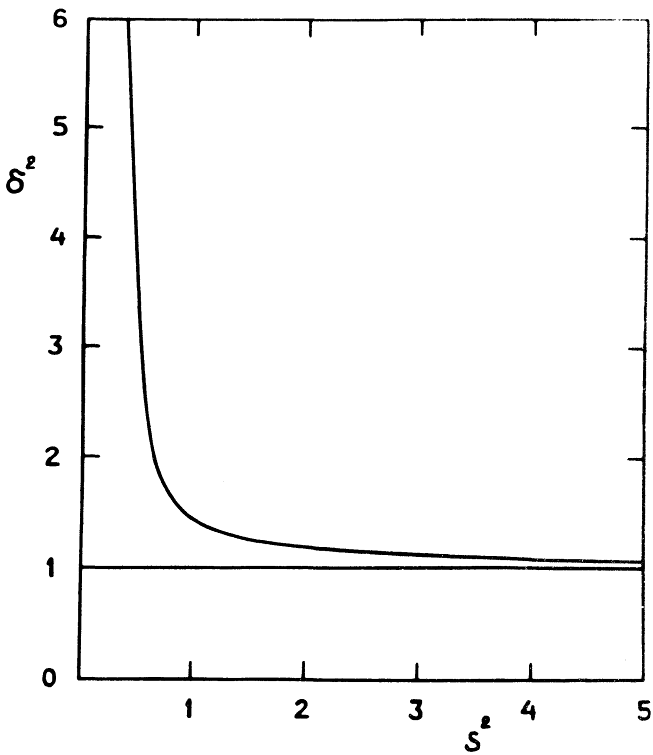
Корню, равному нулю, как всегда в случае автономных систем, соответствует произвольная фаза стационарного решения. Условием устойчивости является неравенство

$$1 - \delta^2 > 0. \qquad (10)$$

Таким образом, радиочастотное поле в резонаторе может быть сильным ($s \gg 1$), но неоднородное уширение линий должно быть не больше истинной ширины линии ($\delta \leqslant 1$).

Функция формы более общего вида (4) приводит к системе девятого порядка, содержащей три новые переменные – моменты второго порядка x'', y'', z''. Опуская вычисления, приведем конечный результат.

Граница области устойчивости для распределения (4) имеет вид плавной кривой с асимптотами, совпадающими с найденными выше границами ($s = 0$, $\delta = 1$).



Р и с. 1.

Важное качественное отличие – возможность устойчивых режимов при большом неоднородном уширении в области слабых радиочастотных полей ($s \ll 1$). На графике рис. 1 показана граница области устойчивости для $\alpha = 2/3$. На том же графике нанесена граница области устойчивости для функции формы $g_1(h)$, соответствующей $\alpha = 1$.

Для исследования процессов, развивающихся за границей области устойчивости, вернемся к функции формы $g_1(h)$ и уравнениям (5). Положим $\delta = 1 + \mu$, где μ – малый параметр. Исследуя систему (5) методом Ван-дер-Поля найдем, что за пределами области устойчивости решение имеет характер колебательного процесса, охватывающего переменные z_1, z_2, z_3. Частота колебаний (безразмерная) будет $\sqrt{2}s$. Для амплитуды колебаний A получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \mu A + \frac{1}{2}æAz, \\ \frac{dz}{dt} &= -z - æ^2A^2\frac{1+s^2}{4s^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

которые имеют стационарное решение

$$A = \frac{2s}{2+s^2}\left(\frac{2\mu}{1+2s^2}\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Здесь z – постоянная составляющая z_3. При $\delta > 1$ происходит мягкое возбуждение колебаний, которые исчезают при возвращении параметров системы в область устойчивости (так называемая безопасная граница области устойчивости).

Приведенные вычисления показывают, что неоднородное уширение линии является весьма серьезным фактором, ограничивающим область устойчивой генерации спиновых генераторов. Исследованные в настоящей работе уравнения спинового генератора можно считать простейшей динамической моделью мазера, работающего на неоднородно уширенной линии. Анализ устойчивости генерации конкретных приборов квантовой электроники требует, конечно, учета специфических особенностей каждого из них.

Поступила в редакцию
20 июля 1971 г.

Литература

1. Ch. Schmelzer. Lectures on the theory and design of an alternating gradient proton-synchrotron, CERN, 1953; С. С. Курочкин. Радиотехника и электроника, 3, 198 (1958); К. В. Владимирский, Б. А. Лабзов. ПТЭ № 2, 103 (1962); K. V. Vladimirsky, B. A. Labzov. Proc. X Coll. Spectr. Intern., Spartan Books, Washington, 1963, p. 677; W. A. Anderson. Rev. Sci. Instr., 33, 1160 (1962); E. L. Sloan, A. Ganssen, E. C. LaVier, Appl. Phys. Letts., 4, 109 (1964); В. Г. Веселаго, Ю. В. Косичкин. Радиотехника и электроника, 7, 6 (1963); А. В. Успенский. Радиотехника и электроника, 9, 279 (1966); Н. М. Иевская и Р. М. Умарходжаев. Электричество, № 7, 57 (1965); Э. Липпмаа, А. Сюгис. Известия АН ЭССР, 14, 129 (1965); А. Н. Любимов, Н. М. Померанцев. ЖТФ, 38, 2054 (1968).
2. R. P. Feynman, F. L. Vernon, R. W. Hellwarth. J. Appl. Phys., 28, 49 (1957).
3. J. Combrisson. Quantum Electronics. Columbia Univ. Press, N.Y., 1960, p.167.
4. F. Bloch. Phys. Rev., 70, 460 (1946).
5. N. Bloembergen, R. V. Pound. Phys. Rev., 95, 8 (1954); C. R. Bruce, R. E. Norberg, G. E. Pake. Phys. Rev., 104, 419 (1956); К. В. Владимирский, ЖЭТФ 33, 532 (1957).
6. А. Андронов, А. Витт. ЖЭТФ, 3, 373 (1933); Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1970 г.