Краткие сообщения по физике № 12 декабрь 1971

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

Ю. Е. Дьяков

1. Интегрирование амплитудных уравнений при равенстве групповых скоростей накачки и одной из волн. В теории ряда процессов – параметрического усиления света, параметрической сверхлюминесценции, оптического смешения с преобразованием частоты вверх или вниз, вынужденного рассеяния света – протекающих в нелинейной среде под действием изменяющегося во времени поля накачки, используются уравнения для комплексных амплитуд $A_{1,2}$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial}{\partial t} + \delta_1\right)A_1 - \gamma_1 A_p(t - z/v_p)A_2^* \exp(i\Delta z) = N_1(t,z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_2}\frac{\partial}{\partial t} + \delta_2\right)A_2 - \gamma_2 A_p(t - z/v_p)A_1^* \exp(i\Delta z) = N_2(t,z), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где функции $N_{1,2}(t,z)$ описывают поля сторонних источников и могут быть как регулярными, так и случайными функциями времени и координаты; $A_p(\tau)$ – мгновенное значение комплексной амплитуды накачки, $I_p(\tau) = |A_p^2(\tau)|$ – интенсивность накачки /1,2/.

Характер взаимодействия волн в нестационарном режиме существенно зависит от соотношения между входящими в (1) групповыми скоростями v_1, v_2 и v_p. В настоящей работе приводится точное решение для (1) в случае

$$v_p = v_1 \geqslant v_2 \qquad (\text{или } - v_p = v_2 \leqslant v_1) \tag{2}$$

(см. /4–7/), обобщающее полученное ранее решение уравнений (1), соответствующее $N_{1,2} = 0$ /3/. Значения амплитуд на границе нелинейной среды могут быть произвольными функциями времени, т.е. при $z = 0$

$$A_1 = A_{10}(t), \ A_2 = A_{20}(t), \ A_p = A_p(t)^{*)}. \tag{3}$$

Параметры $v_{1,2,p}$ и Δ считаются далее вещественными, а $\delta_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ – комплексными постоянными (в разд. 3 рассмотрен случай, когда $\delta_{1,2}, \gamma_{1,2}$ и Δ произвольным образом зависят от z) и использованы обозначения

$$\xi = t - z/v_1, \quad \eta = t - z/v_2, \quad \alpha = \frac{\delta_1 - \delta_2^* + i\Delta}{v_1 - v_2} v_1 v_2,$$

$$\beta = \frac{\delta_2^* v_2 - \delta_1 v_1}{v_1 - v_2} - i\frac{\Delta}{2}\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2},$$

$$\varphi_{1,2} = \exp(\alpha t + \beta z \pm i\Delta z/2), \quad a = 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2^*}\,\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2},$$

$$R = a\left[(\eta_1 - \eta)\int_{\xi_1}^{\xi} I_p(\tau)d\tau\right]^{1/2},$$

$$Q = a\left[(\xi - \xi_1)\int_{\eta}^{\eta_1} I_p(\tau)d\tau\right]^{1/2},$$

---

*) Если $A_p = \mathrm{const}$, то приводимые результаты справедливы, очевидно, при любом соотношении между v_1, v_2 и v_p.

$$M_1(\xi,\eta) = \left[\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} N_1(\xi,\eta) + 2A_{10}(\xi)\delta(\xi - \eta)\right]\varphi_1^{-1}(\xi,\eta),$$

$$M_2^*(\xi,\eta) = \left[\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} N_2^*(\xi,\eta) + 2A_{20}^*(\xi)\delta(\xi - \eta)\right]\varphi_2^{-1}(\xi,\eta),$$

где $M_{1,2}(\xi,\eta)$ и $\varphi_{1,2}(\xi,\eta)$ – функции $M_{1,2}(t,z)$ и $\varphi_{1,2}(t,z)$, преобразованные к переменным ξ и η. Для определенности везде предполагается, что $v_1 > v_2$.

Решение системы уравнений (1) в области $z \geq 0$, удовлетворяющее граничным условиям (3), имеет следующий вид: если $v_p = v_1 \geq v_2$, то

$$A_1 = \varphi_1 \int_\eta^\xi M_1(\xi,\eta_1)d\eta_1 + \varphi_1 A_p(\xi) \int_\eta^\xi d\xi_1 \int_\eta^{\xi_1} d\eta_1 \left[\frac{a^2}{2} \times \right.$$

$$\left. \times A_p^*(\xi_1) M_1(\xi_1,\eta_1) I_1(R) \frac{\eta_1 - \eta}{R} + \gamma_1 \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} M_2^*(\xi_1,\eta_1) I_o(R)\right], \tag{4}$$

$$A_2^* = \varphi_2 \int_\eta^\xi M_2^*(\xi_1,\eta)d\xi_1 + \varphi_2 \int_\eta^\xi d\xi_1 \int_\eta^{\xi_1} d\eta_1 \left[M_2^*(\xi_1,\eta_1) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{I_1(R)R}{2(\eta_1 - \eta)} + \gamma_2^* \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} M_1(\xi_1,\eta_1)\, A_p^*(\xi_1) I_o(R)\right]; \tag{5}$$

если $v_p = v_2 \leq v_1$, то

$$A_1 = \varphi_1 \int\limits_{\eta}^{\xi} M_1(\xi,\eta_1)d\eta_1 + \varphi_1 \int\limits_{\eta}^{\xi} d\xi_1 \int\limits_{\eta}^{\xi_1} d\eta_1 \Bigg[M_1(\xi_1,\eta_1) \times$$

$$\times \frac{I_1(Q)Q}{2(\xi - \xi_1)} + \gamma_1 \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} A_p(\eta_1) \; M_2^*(\xi_1,\eta_1) I_o(Q) \Bigg], \quad (6)$$

$$A_2 = \varphi_2 \int\limits_{\eta}^{\xi} M_2^*(\xi_1,\eta)d\xi_1 + \varphi_2 A_p^*(\xi) \int\limits_{\eta}^{\xi} d\xi_1 \int\limits_{\eta}^{\xi_1} d\eta_1 \Bigg[\frac{a^2}{2} \times$$

$$\times M_2^*(\xi_1,\eta_1) A_p(\xi_1) I_1(Q) \frac{\xi - \xi_1}{Q} + \frac{\gamma_2^* v_1 v_2}{v_1 - v_2} M_1(\xi_1,\eta_1) I_o(Q) \Bigg],$$

(7)

где I_o и I_1 – модифицированные функции Бесселя.

2. <u>Параметрическое усиление в поле короткого импульса накачки.</u> Предположим, что импульс накачки имеет малую длительность $\tau_p \ll T = z(v_1 - v_2)/v_1 v_2$ и $\alpha\tau_p \ll 1$. Считая для простоты усиливаемый сигнал гармоническим, а импульс накачки прямоугольной формы, находим из (4) амплитуду сигнала после усиления

$$A_1(t,z) = A_{10} e^{-\delta_1 z} \begin{cases} 1 & (\tau_p < \xi < 0), \\ I_o(G) & (0 < \xi < \tau_p), \end{cases}$$

где $G = \Gamma_o z\sqrt{4\xi/T}$ – нестационарный коэффициент усиления ($\Gamma_o = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2^* I_p}$ – стационарный инкремент), причем $G_{max} = \Gamma_o z\sqrt{4\tau_p/T}$ независимо от величины волновой расстройки Δ. Из полученного выражения для $A_1(t,z)$

следует, что при $G_{max} \gg 1$ эффективная длительность τ_1 импульса сигнала будет значительно меньше длительности импульса накачки

$$\tau_1 \approx \tau_p / 2G_{max} \ll \tau_p.$$

Для сравнения отметим, что в режиме так называемого вырожденного параметрического усиления ($v_{1,2} = v \neq v_p$, $\delta_{1,2} = \delta$, $\gamma_{1,2} = \gamma$) и $\Delta = 0$ (см. /4/) при той же величине дисперсии групповых скоростей и сходных условиях накачки,

$$|v_p - v| = v_p - v_2, \quad \tau_p \ll T^{(b)} = |v_p - v| v^{-2} z = T,$$

импульс сигнала получается более растянутым, а усиление значительно меньше (причем оно не зависит от длины взаимодействия z):

$$A_{1max}^{(b)} = A_{10} \exp G_{max}^{(b)}, \; G_{max}^{(b)} = \Gamma_o z(\tau_p/T), \; \tau_1^{(b)} \approx T \gg \tau_p,$$

так что

$$G_{max}^{(b)} : G_{max} = \sqrt{\tau_p/2T} \ll 1, \; \tau_1^{(b)} : \tau_1 = \frac{T}{\tau_p} 2G_{max} \gg 1.$$

Например, если $z = 3$ см, $(v_1 - v_2)v_{1,2}^{-1} = 10\%$, $\tau_p = 10^{-12}$ сек, $I_p = 10^3$ Мвт/см^2, $\gamma_1\gamma_2^* = 0{,}04$ Мвт$^{-1}$ (KDP), то импульс сигнала получается в 15 раз короче импульса накачки при пиковом усилении в $I_o(7{,}2) \cong 170$ раз.

<u>Нестационарная параметрическая сверхлюминесценция.</u> Амплитудные уравнения в этом случае имеют более сложный вид /5/

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial}{\partial t} + \delta_1 + \rho_{11}\frac{\partial}{\partial x} + i\rho_{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] A_1 -$$

$$- \gamma_1 A_p(t - z/v_p) A_2^* e^{i\Delta z} = N_1(t,x,y,z),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_2}\frac{\partial}{\partial t} + \delta_2 + \rho_{21}\frac{\partial}{\partial x} + i\rho_{22}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]A_2 -$$

$$- \gamma_2 A_p(t - z/v_p)A_1^* e^{i\Delta z} = N_2(t,x,y,z),$$

однако преобразованием Фурье по поперечным координатам x и y они сводятся к системе уравнений типа (1), т.е. решение этой задачи при условии (2) также дается формулами (4) – (7), если в них отбросить первые члены, соответствующие свободным волнам, и выбрать сторонние поля $N_{1,2}(t,x,y,z)$ так, чтобы они описывали нулевые шумы на соответствующих частотах.

3. Вынужденное комбинационное рассеяние в неоднородной среде. В теории ВКР уравнения (1) рассматриваются обычно без учета производной $\partial A_2/\partial z$. При этом упрощении задача может быть решена для более общих условий, когда рассеивающая среда является пространственно-неоднородной, а луч накачки испытывает затухание или фокусировку. Указанные факторы учитываются путем введения некоторой зависимости от z параметров амплитудных уравнений

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \delta_1(z)A_1 =$$

$$= \gamma_1(z)A_p(t - z/v_p)A_2^* \exp\left[i\int_0^z \Delta(z_1)dz_1\right],$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{A_2}{T_2} = \gamma_2(z)v_2 A_p(t - z/v_p)A_1^* \exp\left[i\int_0^z \Delta(z_1)dz_1\right],$$

$$T_2 = (\delta_2 v_2)^{-1},$$

решение которых при условии (2) ($v_1 = v_p$) приводит к следующему результату:

$$A_1 = A_{10}(\xi)\exp\left[-\int_0^z \delta_1(z_1)dz_1\right] +$$

$$+ 2A_p(\xi)v_2\exp\left[-\int_0^z \delta_1(z_1)dz_1\right]\int_0^z \gamma_1(z_1)\gamma_2^*(z_1)dz_1 \times$$

$$\times \int_0^\infty A_{10}(\xi-\theta)A_p^*(\xi-\theta)\exp(-\theta/T_2^*)\, I_1(q)q^{-1}d\theta, \qquad (8)$$

$$A_2 = \gamma_2^*(z)v_2\exp\left\{-\int_0^z \left[\delta_1(z_1) + i\Delta(z_1)\right]dz_1\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty A_{10}(\xi-\theta)\exp(-\theta/T_2^*)A_p^*(\xi-\theta)I_0(q)d\theta, \qquad (9)$$

где

$$q = 2\sqrt{v_2}\left[\int_0^z \gamma_1(z_1)\gamma_2^*(z_1)dz_1 \int_{\xi-\theta}^{\xi} I_p(\tau)d\tau\right]^{1/2}.$$

Если $\delta_1 = \Delta = 0$ и $\gamma_{1,2} = \mathrm{const}$, то (8) и (9) переходят в известные выражения для амплитуд стоксовой компоненты ВКР и волны оптических фононов при рассеянии в однородной среде без потерь (см., например, /6/).

Автор признателен С. А. Ахманову и Ф. В. Бункину за обсуждение результатов работы.

Поступила в редакцию
5 октября 1971 г.

Литература

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. Проблемы нелинейной оптики. Изд. АН СССР, 1964 г.

2. Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Изд. "Мир", 1966 г.
3. Ю. Е. Дьяков. Аннотации докладов на 3-м Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике (Ереван, 1967 г.). Изд. МГУ, 1967 г.
4. А. С. Чиркин. Диссертация. МГУ, 1966 г.
5. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин. Статистические явления в нелинейной оптике. Изд. МГУ, 1971 г.
6. R. L. Carman, F. Shimizu, C. S. Wang, N. Bloembergen. Phys. Rev. A, 2, 60 (1970).