УДК 530.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ С НЕКОММУТИРУЮЩИМИ ТЕНЗОРАМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ

Н. А. Жура

Изучен вопрос о распространении плоских электромагнитных волн в средах с некоммутирующими тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей, в предположении, что они имеют только одну общую ось. Для случая распространения волн произвольной формы получен аналог формул Кирхгофа. Изучена также геометрия нормальной поверхности и дана классификация таких сред по их оптическим свойствам.

Важность вопроса о распространении света в магнитных кристаллах отмечалась в ряде работ, среди которых стоит особо отметить монографию [1]. В ней, в частности, (с. 263 и с. 264) отмечены трудности, возникающие при построении теории в случае, когда тензоры ε (диэлектрическая проницаемость) и μ (магнитная проницаемость) не обладают общей системой главных осей (и, как следствие, не коммутируют). Они охарактеризованы как "непреодолимые" ([1], с. 263). В [1] была развита соответствующая теория, основанная на предложенном там же так называемом инвариантном методе.

Наличие таких сред в природе, по-видимому, под вопросом, хотя на их существование нет никаких запретов (см. также подстрочное замечание на с. 614 [3]). В настоящее время исследуется возможность получения их искусственным путем и исследуются различные свойства.

В настоящей статье рассматривается прямой подход к проблеме распространения света в магнитных кристаллах с некоммутирующими тензорами ε и μ, в предположении, что они обладают только одной общей осью, и, в частности, не коммутируют.

При таком предположении удается рассмотреть вопрос о распространении как плоских волн, так и волн произвольной формы. Для последних приводим в п. 2 формулы, являющиеся аналогом известных формул Кирхгофа в скалярной теории. Изучена геометрия нормальной поверхности и дана классификация магнитно-анизотропных сред по их оптическим свойствам.

1. Распространение плоских волн и геометрия нормальной поверхности. Будем разыскивать решения системы Максвелла

$$\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \mathrm{rot} H, \ \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = -\mathrm{rot} E,$$

$$\mathrm{div} D = 0, \ \mathrm{div} B = 0, \tag{1}$$

где $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$ в виде плоских волн

$$E = E_0 e^{-i\omega t + i\frac{k}{c}x}, \ H = H_0 e^{-i\omega t + i\frac{kx}{c}}. \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, а $k = (k_1, k_2, k_3)$ – волновой вектор.

Кроме того, предполагаем, что ε и μ вещественные, симметричные, положительно определенные тензоры, имеющие только одну общую ось.

Следуя классической схеме [1], [3], [4], подставим выражения (2) в (1) и получим

$$\omega D_0 = -[k, H_0], \ \omega B_0 = [k, E_0]$$

$$(D_0, k) = 0, \ (B_0, k) = 0,$$

где положено $D_0 = \varepsilon E_0$, $B_0 = \mu H_0$.

Удобно переобозначить $D_0 = u_1$, $B_0 = u_2$. Тогда предыдущие уравнения примут вид

$$\omega u_1 = -[k, b u_2], \ \omega u_2 = [k, a u_1]$$

$$(u_1, k) = 0, \ (u_2, k) = 0, \tag{3}$$

где $a = \varepsilon^{-1}$, а $b = \mu^{-1}$.

Зафиксируем базис, в котором тензор μ (а значит и b) диагонален. Пусть, для определенности

$$\mu = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \ b = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3),$$

где $\mu_k > 0$, $b_k > 0$ в силу положительной определенности μ. При этом, очевидно, $b_k = 1/\mu_k$, $k = 1, 2, 3$. Что касается ε, то его матрица в этом базисе имеет одну из форм

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ 0 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_5 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_5 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & 0 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

в соответствии с тем, какую ось ε и μ имеют общей. Аналогичную структуру имеет и матрица a. Остановимся, для определенности, на первой возможности, когда

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В силу ее положительной определенности имеем, согласно критерию Сильвестра, $a_k > 0$, $k = 1, 2, 3$ и $a_2 a_3 > a_4^2$.

Возвращаясь к (3), заметим, что частота ω плоской волны (2) не может обращаться в нуль, ибо в противном случае, как нетрудно проверить, должно быть $E_0 = 0$, $H_0 = 0$, что невозможно, поскольку приводит к тривиальному решению.

Найдем вначале дисперсионное уравнение. С этой целью подставим в первое из уравнений (3) выражение для u_2, взятое из второго уравнения этой же системы. В результате получим

$$[k, b[k, au_1]] + \omega^2 u_1 = 0, \ (k, u_1) = 0, \ k \neq 0. \tag{4}$$

Положим $A = [k]b[k]a$, где соответствующая вектору k кососимметричная матрица

$$[k] = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях система (4) принимает вид

$$(A + \omega^2) u_1 = 0, \ (k, u_1) = 0, \ k \neq 0. \tag{5}$$

Приведем явный вид матрицы A:

$$\begin{pmatrix} -a_1b_3k_2^2 - a_1b_2k_3^2 & a_2b_3k_1k_2 + a_4b_2k_1k_3 & a_4b_3k_1k_2 + a_3b_2k_1k_3 \\ a_1b_3k_1k_2 & -a_2b_1k_3^2 - a_2b_3k_1^2 + a_4b_1k_2k_3 & a_3b_1k_2k_3 - a_4b_1k_3^2 - a_4b_3k_1^2 \\ a_1b_2k_1k_3 & a_2b_1k_2k_3 - a_4b_1k_2^2 - a_4b_2k_1^2 & -a_3b_2k_1^2 - a_3b_1k_2^2 + a_4b_1k_2k_3 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

С учетом равенства $A'k = 0$, где A' – транспонированная к A матрица, проводя алгебраические преобразования, находим дисперсионное уравнение

$$\omega^4 - \omega^2 p(k) + q(k) = 0, \qquad (7)$$

где

$$p(k) = (a_2b_3 + a_3b_2)k_1^2 + (a_1b_3 + a_3b_1)k_2^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)k_3^2 - 2a_4b_1k_2k_3,$$

$$q(k) = (b_2b_3k_1^2 + b_1b_3k_2^2 + b_1b_2k_3^2)((a_2a_3 - a_4^2)k_1^2 + a_1a_3k_2^2 + a_1a_2k_3^2 - 2a_1a_4k_2k_3). \qquad (8)$$

Уравнение поверхностей волновых векторов получаем, полагая в (7) $k = \omega n$:

$$1 - p(n) + q(n) = 0. \qquad (9)$$

Для исследования ее строения рассмотрим подробнее уравнение (7). Его корни

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{p(k) \pm \sqrt{\Delta(k)}}{2}, \qquad (10)$$

где $\Delta(k) = p^2(k) - 4q(k)$, вещественные, поскольку дискриминант Δ, как будет далее показано, неотрицателен. Поэтому поверхность (9) распадается на пару кусков $\sigma_\pm$ с уравнениями

$$\sigma_\pm :\ p(n) \pm \sqrt{\Delta(n)} = 2. \qquad (11)$$

Переходя от системы координат k к "растянутой" $\eta_1 = \sqrt{b_2b_3}k_1$, $\eta_2 = \sqrt{b_1b_3}k_2$, $\eta_3 = \sqrt{b_1b_2}k_3$, а затем к повернутой вокруг оси η_1 на угол φ системе, придем к дальнейшему упрощению форм p, q, Δ:

$$p(\zeta) = (\nu_2 + \nu_3)\zeta_1^2 + (\nu_1 + \nu_3)\zeta_2^2 + (\nu_1 + \nu_2)\zeta_3^2,$$

$$q(\zeta) = (\zeta, \zeta)(\nu_2\nu_3\zeta_1^2 + \nu_1\nu_3\zeta_2^2 + \nu_1\nu_2\zeta_3^2),$$

$$\Delta(\zeta) = (\nu_3 - \nu_2)\zeta_1^4 + (\nu_3 - \nu_1)\zeta_2^4 + (\nu_2 - \nu_1)\zeta_3^4 +$$

$$+2(\nu_3 - \nu_2)(\nu_3 - \nu_1)\zeta_1^2\zeta_2^2 + 2(\nu_2 - \nu_3)(\nu_2 - \nu_1)\zeta_1^2\zeta_3^2 + 2(\nu_1 - \nu_3)(\nu_1 - \nu_2)\zeta_2^2\zeta_3^2,$$

где переменная $\zeta = e^{-1}\eta$, а e – матрица поворота. Здесь $\nu_1 = g_1$, $2\nu_{2,3} = g_2 + g_3 \pm \sqrt{\delta}$, $\delta = (g_3 - g_2)^2 + 4g_4^2$, где $g_k = a_k/b_k$, $k = 1, 2, 3$, $g_4 = a_4/\sqrt{b_2 b_3}$ являются элементами матрицы g, аналогичной (4), а $\cos\varphi = 2g_4/\delta_0$, $\sin\varphi = \nu_2/\delta_0$, $\delta_0 = \nu_2^2 + 4g_4^2$. В этих новых переменных выражение для $\Delta(\zeta)$ можно представить в виде

$$\Delta(\zeta) = \Delta_+(\zeta)\Delta_-(\zeta),$$

где $\Delta_\pm(\zeta) = (\nu_j - \nu_i)\zeta_k^2 + (\sqrt{\nu_j - \nu_k}\zeta_i \pm \sqrt{\nu_k - \nu_i}\zeta_j)^2$, и где $\{i, k, j\}$ такая перестановка индексов $\{1, 2, 3\}$, что $\nu_i < \nu_k < \nu_j$.

Это позволяет заключить, что оптические оси суть прямые, проходящие через начало координат симметрично отношению к осям ζ_i и ζ_j и имеющие уравнения

$$L_+ : \ \zeta_k = 0, \ \sqrt{\nu_j - \nu_k}\zeta_i + \sqrt{\nu_k - \nu_i}\zeta_j = 0 \quad \text{и}$$

$$L_- : \ \zeta_k = 0, \ \sqrt{\nu_j - \nu_k}\zeta_i - \sqrt{\nu_k - \nu_i}\zeta_j = 0.$$

Заметим, что собственные значения матрицы g совпадают с собственными значениями матрицы ab^{-1}, но соответствующие им собственные векторы не совпадают, поскольку матрица ab^{-1} не симметрична. Как следствие, отсюда получаем, что утверждение работы [1, стр. 278], состоящее в том, что оптические оси $L_\pm$ лежат на плоскости, содержащей собственные векторы матрицы ab^{-1}, отвечающие ее экстремальным собственным значениям, неточно. Это возможно, лишь когда матрицы ε и μ коммутируют.

Также заметим, что в новых переменных ζ выражение для $\Delta(\zeta)$ совпадает с классическим [3], [4], однако следует помнить, что в исходных координатах оно искажено. Тем не менее представляется целесообразным классификацию проводить по отношению именно к переменным ζ. В этих переменных для алгебраической поверхности $1 - p(\zeta) + q(\zeta) = 0$ и ее "кусков" $p(\zeta) \pm \sqrt{\Delta(\zeta)} = 2$ имеют место все классические результаты, связанные с ее строением и расположением оптических осей. В частности, уравнение этой поверхности можно записать также и в виде

$$\zeta_1^2/(\zeta^2-\nu_1)+\zeta_2^2/(\zeta^2-\nu_2)+\zeta_3^2/(\zeta^2-\nu_3)=1,$$

где $\zeta^2 \equiv |\zeta|^2 = \zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2$, а ν_k, $k=1,2,3$, определены выше.

Рассмотрим теперь случай, когда матрица g имеет только два различных собственных значения, так что $\nu_k=\nu_i$ или $\nu_k=\nu_j$. Тогда $\Delta(\zeta)=\Delta_0^2(\zeta)$, где $\Delta_0(\zeta)$ совпадает, соответственно, с $(\nu_j-\nu_i)(\zeta_i^2+\zeta_k^2)$ или с $(\nu_j-\nu_i)(\zeta_j^2+\zeta_k^2)$.

Таким образом, в этом случае имеется только одна оптическая ось L_0 с уравнением $\zeta_i=\zeta_k=0$ или $\zeta_j=\zeta_k=0$. Среды, для которых существует одно или два направления, вдоль которых распространяется только одна волна, называем, как обычно, одноосными или двухосными.

Если матрицы ε и μ коммутируют, то $\nu_k=\varepsilon_k/\mu_k$, $k=1,2,3$, а если еще и $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$, то ν_k следует заменить на ε_k, а ζ_k на η_k, $k=1,2,3$, поскольку нет необходимости переходить к переменным ζ. Уравнение поверхности в этом случае в точности совпадает с классическим [3], [4].

Если $\nu_1=\nu_2=\nu_3$, то такую среду уместно называть изотропной, поскольку тогда $d(\zeta)\equiv 0$ и вдоль каждого направления может распространяться только одна волна. Хотя уравнением поверхности нормальных векторов служит, в переменных η, сфера $(\eta^2-\nu)^2=1$, тем не менее в "нерастянутых" переменных k оно сферой не является и скорость соответствующих волн в разных направлениях, вообще говоря, различна.

2. <u>О распространении волн произвольной формы.</u> Выше был рассмотрен вопрос о распространении плоских волн в магнитно-анизотропных средах с некоммутирующими тензорами ε и μ. Однако плоские волны в значительной степени весьма идеализированный объект, поскольку их энергия бесконечна. Другой стороной этого факта является неединственность такого рода решений системы Максвелла, поскольку умноженное на произвольную, отличную от нуля, постоянную, решение типа плоской волны также будет решением. Таким образом возникает вопрос и о распространении соленоидальных волн произвольного вида с конечной энергией. Решение этого вопроса было получено ранее для случая коммутирующих тензоров ε и μ [5]. Поэтому приведем здесь без доказательства соответствующий результат, имеющий место в предположениях п. 1 данной статьи. Именно, если в начальный момент времени $t=0$ известно поле $E(0,x)=E_0(x)$ и $H(0,x)=H_0(x)$, $x\in\mathcal{R}^3$, то его эволюция во времени определена согласно следующим формулам, являющимся аналогом формул Кирхгофа для скалярного волнового

уравнения

$$\varepsilon E(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t(M_+\varepsilon E_0)(t,x)) + t(M_-(\mathrm{rot}H_0))(t,x),$$

$$\mu H(t,x) = -t(M_+(\mathrm{rot}E_0))(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}(t(M_-\mu H_0)(t,x)).$$

Разумеется, здесь предполагается, что $\mathrm{div}\varepsilon E_0 = 0$, $\mathrm{div}\mu H_0 = 0$. Кроме того, среднее значение

$$((M_\pm\varphi)t,x) = \frac{1}{|\sigma_\pm(x,t)|}\int\limits_{\sigma_\pm(x,t)}\varphi(y)d\sigma_\pm$$

вектор-функции φ берется по поверхностям $\sigma_\pm(x,t)$, полученным из "кусков" $\sigma_\pm$ нормальной поверхности, определенных согласно формуле (11), переносом начала координат в точку x и растяжением в $t>0$ раз вдоль каждого луча, проходящего через начало координат. Кроме того, $|\sigma_\pm(x,t)|$ есть площадь соответствующего "куска" нормальной поверхности, а $d\sigma_\pm$ – элемент ее площади.

Когда $\nu_1=\nu_2=\nu_3$, то эти "куски" сливаются в одну поверхность σ_0 с уравнением $p(n)=2$, и формулы упрощаются, поскольку тогда $M_+=M_-=M_0$. Еще значительнее они упрощаются, когда $\mu=1$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon$, поскольку тогда поверхность σ_0 обращается в сферу. По-видимому, и в общем случае, когда ε и μ не имеют общих главных осей, эти формулы остаются в силе, однако какие-либо сведения о строении поверхности σ и ее "кусков" $\sigma_\pm$, по-видимому, отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, изд-во АН БССР, 1958.

[2] Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, изд-во "Наука и техника", 1976.

[3] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1973 (M. Born, E. Wolf. Principles of Optics, Fourth Edition, Pergamon Press, 1968).

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред, издание третье, исправленное, М., Наука, 1992.

[5] Жура Н. А. Задача Коши для системы кристаллооптики. В: "Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов", с. 72-73, Суздаль, 1-6 июля, 2002 г.

Поступила в редакцию 30 сентября 2004 г.