

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ РАСЧЁТУ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СЕКТОРНЫХ ЦИКЛОТРОНОВ

В. Н. Канунников

Требования, предъявляемые к точности и стабильности пространственной конфигурации магнитного поля изохронных циклотронов, продолжают повышаться, что связано со стремлением максимально улучшить характеристики пучков ускоряемых частиц. Например, в предложениях о "спектрометрическом"¹ или "моноэнергетическом"² циклотронах допуска на магнитное поле составляют $\sim 10^{-5}$. При этом предполагается использовать автоподстройку поля по пучку, чтобы снизить требования к точности формирования поля полюсами и распределёнными обмотками до $\sim 10^{-4}$. Но и такой допуск является необычно жёстким. Хотя моделирование является, по-видимому, неизбежным этапом формирования такого поля, объём работ на моделях можно значительно сократить, если повысить точность расчётов и упростить их методику. Главной целью расчётов перед моделированием является анализ различных вариантов магнитной системы и выбор оптимальной её геометрии, удовлетворяющей как требованиям динамики частиц, так и конструктивным соображениям.

Обычно при расчётах рассматривают двумерное поле в координатах z, θ *) в условиях бесконечно большой проницаемости полюсов: эти два допущения позво-

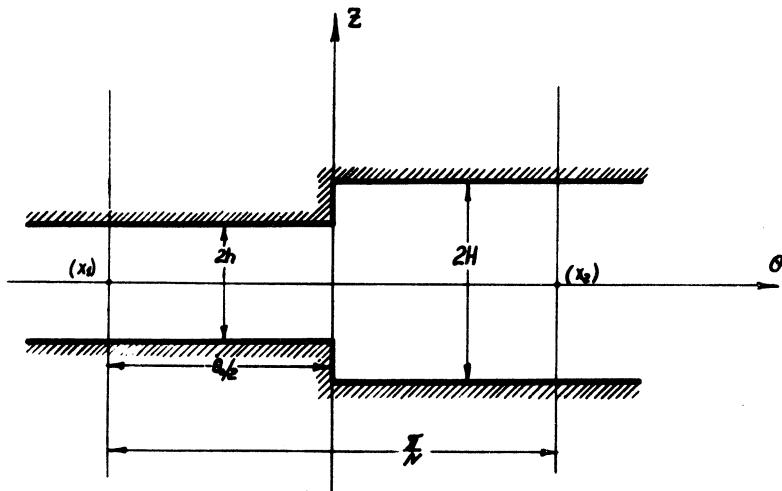
*) При этом расчёт теряет точность в области, близкой к центру магнита; следовательно, там моделирование должно играть преобладающую роль.

ляют использовать методику конформных отображений. Кроме того, известные методы расчёта основаны и на ряде дополнительных допущений (например, приближение "ступенчатого" поля³ или "одного сектора"⁴, использование полуэмпирических формул⁵, полученных из численных расчётов и справедливых в ограниченной области изменения параметров и др.). Ниже изложена более совершенная методика расчётов, позволившая получить аналитические зависимости, которые связывают между собой магнитные и геометрические параметры циклотрона и тем самым облегчают анализ многочисленных вариантов. Рассматриваются два случая: 1) циклотрон с секторными выступами на сплошных полюсах; 2) циклотрон с разделёнными секторами. Настоящая работа является развитием метода, применявшегося к кольцевому фазотрону⁶, а затем к циклотрону с отдельными секторами⁷ и к магнитам с разрезами⁸. Результаты расчётов хорошо согласуются с экспериментальными данными^{7,8}.

Распределение поля $f(R, \theta)$ в средней плоскости циклотрона ($z = 0$) при сделанных допущениях находится методом конформных отображений в виде неявной функции азимута θ и радиуса R и может быть прямо использовано для численного анализа движения ускоряемых частиц. При этом часто пользуются разложением поля в ряд Фурье; динамику частиц по существу определяет среднее по азимуту поле $\langle f \rangle$ и основная гармоника, а высшие гармоники влияют слабее. В ряде случаев вместо основной гармоники используют так называемый "флаттер" F - полусумму квадратов всех гармоник. Как известно, F выражается через $\langle f \rangle$ и средний квадрат поля $\langle f^2 \rangle$: $F = \langle f^2 \rangle \langle f \rangle^{-2} - 1$. Таким образом, зная $\langle f \rangle$ и $\langle f^2 \rangle$, можно определить динамические характеристики циклотрона. Поэтому, если удастся найти аналитическую связь $\langle f \rangle$ и $\langle f^2 \rangle$ с геометрией магнита, то это значительно облегчит анализ вариантов магнитной системы. В частности, будут возможны как прямая оптимизация гео-

метрии, так и определение допусков на её параметры.

Геометрия задачи для секторного циклотрона со сплошными полюсами показана на рис.1. Распределение



Р и с. 1. Идеализированная геометрия магнита для секторного циклотрона со сплошными полюсами. Азимуты x_1 и x_2 - середины выступов ("холмов") и впадин ("долин") на полюсах, соответственно.

поля H_z по азимуту описывается (см., напр.,⁵) неявной функцией:

$$x = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{\mu} \ln \frac{f+\mu}{f-\mu} - \ln \frac{1+f}{1-f} \right], \quad (1)$$

где $f(x) = H_z(x)/H_z(-\infty)$, $\mu = h/H$, $x = \theta R/h$,

R - радиус, а остальные обозначения ясны из рис. 1. В работе⁵ зависимость (1) использовалась для численных расчётов величин $\langle f \rangle$ и F , а результаты аппроксимировались полуэмпирическими формулами, справедливыми в ограниченной области изменения параметров. Как оказалось, для $\langle f \rangle$ и F можно получить аналити-

ческие выражения, если воспользоваться очевидным соотношением

$$\int f(x) dx = \int f \frac{dx}{df} df \quad (2)$$

и учесть асимптотику $f(x)$:

$$f(x) \approx 1 - \exp(\mu x + \ln 2 - \frac{1}{\mu} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}), \quad x = x_1 < 0; \quad (3)$$

$$f(x) \approx \mu + \exp \left[\ln(2\mu) - \mu \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \mu \mu x \right], \quad x = x_2 > 0. \quad (4)$$

Результаты таковы:

$$\langle f \rangle = \mu + (1-\mu) \frac{N\theta_0}{2\pi} + \frac{Nh}{\pi^2 R} \left(\frac{1+\mu^2}{\mu} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} + 2 \ln \frac{1-\mu^2}{4\mu} \right); \quad (5)$$

$$\langle f^2 \rangle = \mu^2 + (1-\mu^2) \frac{N\theta_0}{2\pi} + \frac{Nh}{\pi^2 R} \frac{(1-\mu^2)(1-\mu)}{\mu} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}, \quad (6)$$

где N - число, а θ_0 - угловая ширина секторных выступов на полюсах.

Аналогичные выражения получены и для циклотрона, состоящего из отдельных секторов. Такая магнитная система была предложена⁹ и реализована¹⁰ в ФИАН^е; в настоящее время она рассматривается в ряде работ (например, 1-3, 11) в связи с возможностью усиления фокусировки и удобством размещения ускоряющих устройств. Геометрия магнита для этого случая показана на рис.2. Зависимость поля H_z от азимута (см. например, 8) определяется равенством

$$x = \frac{2}{\pi} \left[\arctg \left(\frac{1}{\mu} \sqrt{f^2(1+\mu^2) - \mu^2} \right) + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{f^2(1+\mu^2) - \mu^2}}{1 - \sqrt{f^2(1+\mu^2) - \mu^2}} \right], \quad (7)$$

$$\text{где } f(x) = \frac{H_z(x)}{H_z(\infty)}, \quad x = \frac{\theta}{\frac{\pi}{N} - \frac{\theta_0}{2}}; \quad \mu = \frac{h}{R \left(\frac{\pi}{N} - \frac{\theta_0}{2} \right)},$$

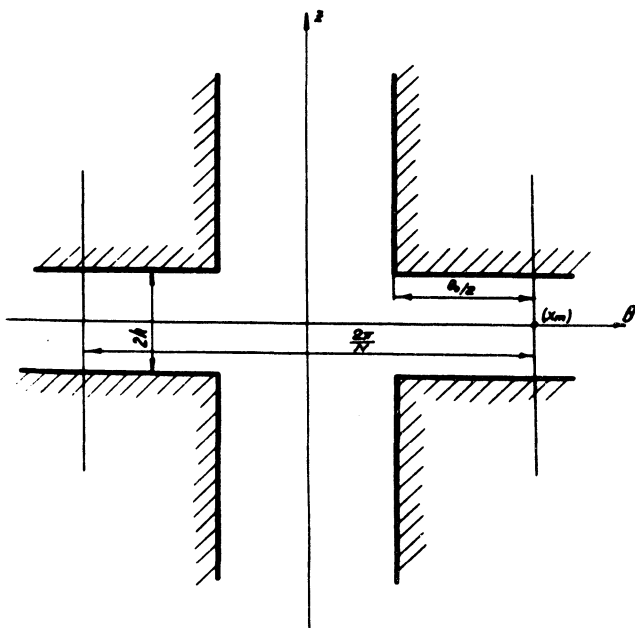
N - число секторов, а θ_0 - азимутальная ширина сектора.

Для этого случая также можно вычислить $\langle f \rangle$ и $\langle f^2 \rangle$, если учесть (2) и асимптотическое поведение $f(x)$:

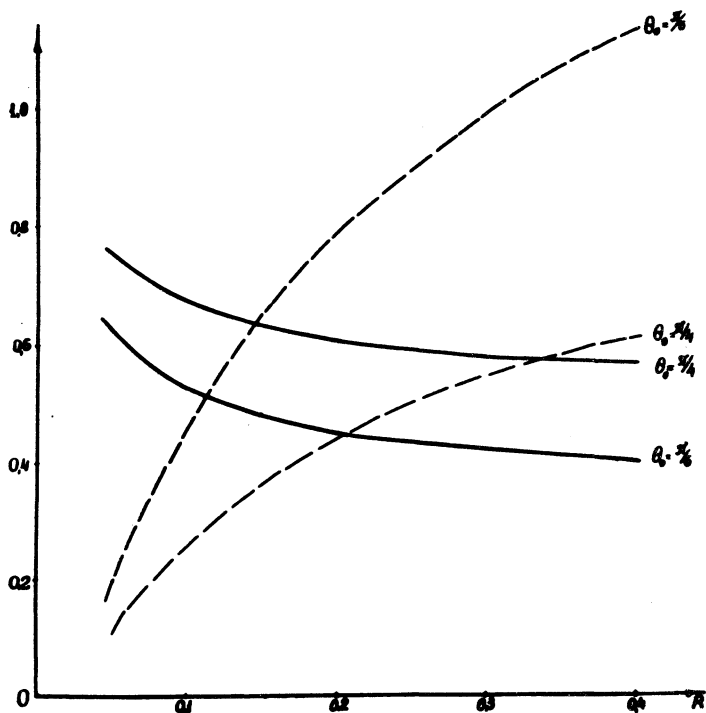
$$f(x) \approx 1 - \frac{2}{1+\mu^2} \exp\left(\frac{2}{\mu} \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu} - \frac{2}{\mu} x\right); \quad x \approx x_m \quad (8)$$

Результаты вычислений:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \frac{\mu}{2x_m} \ln \frac{f_m + \sqrt{f_m^2 (1+\mu^2) - \mu^2}}{f_m - \sqrt{f_m^2 (1+\mu^2) - \mu^2}} \approx \\ &\approx 1 + \frac{\mu}{2x_m} \ln \frac{1+\mu^2}{\mu^2} - \frac{2}{2x_m} \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu}; \end{aligned} \quad (9)$$



Р и с. 2. Идеализированная геометрия магнита для циклотрона с отдельными секторами. Нулевой азимут соответствует середине промежутка, азимут x_m - середина сектора.



Р и с. 3. Зависимость от радиуса среднего по азимуту поля (сплошные кривые) и флаттера (пунктирные кривые) для магнита из отдельных секторов с постоянной азимутальной шириной θ_0 и постоянным вертикальным зазором $2h$. Радиус в относительных единицах; $N = 4$; $h = 0,008$ единиц радиуса.

$$\langle f^2 \rangle = \frac{\mu}{\sigma x_m} \ln \frac{1 - \sqrt{f_m^2 (1 + \mu^2) - \mu^2}}{1 + \sqrt{f_m^2 (1 + \mu^2) - \mu^2}} \approx 1 - \frac{2}{\sigma x_m} \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu}; \quad (10)$$

где $f_m = f(x_m)$, $x_m = (1 - \frac{N\theta_0}{2\sigma})^{-1}$.

Как показывают расчёты, приближённые равенства в (9) и (10) во всех практически важных случаях справедливы с точностью $\lesssim 10^{-4}$ и существенно упрощают вычисления.

В качестве иллюстрации на рис.3 приведены зависимости $\langle f \rangle$ и F от радиуса для циклотрона с радиальными секторами ($\theta_0 = \text{const}$) и постоянным вертикальным зазором ($h = \text{const}$). Пользуясь формулами (9) и (10), можно решать и обратную задачу: по заданным функциям $\langle f \rangle(R)$ и $F(R)$ найти геометрию магнита. В частности, можно получить зависимости $h(R)$ и $\theta_0(R)$, обеспечивающие изохронный закон изменения $\langle f \rangle$ и, например, постоянство F . Если для получения изохронного $\langle f \rangle(R)$ изменять только ширину сектора θ_0 , а вертикальный зазор h сохранить постоянным, то F будет изменяться с радиусом, но менее резко, чем в случае $\theta_0 = \text{const}$. Возможны и другие варианты использования полученных результатов.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. И. Харламовой за проведение численных расчётов и В. А. Пападичеву за плодотворные дискуссии.

Поступила в редакцию
2 февраля 1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. Барит И. Я. и др. Препринт ФИАН, №15 (1969).
2. Глазов А. А., Денисов Ю. Н. и др. Препринт ОИЯИ, Р9-3932 (1968).
3. Gordon M.M., Nucl. Instr. and Meth., 58, 245 (1968).
4. Гладышев В. А., Диссертация, ФИАН (1967).

5. Neu H., Werner H., Nucl. Instr. and Meth., 10, 333 (1961).
6. Канунников В. Н., ЖТФ, 33, 592 (1963).
7. Канунников В. Н., Препринт ФИАН, № 21 (1969).
8. Пападичев В. А., Препринт ФИАН № 69 (1969).
9. Moroz E.M., Rabinovich M.S., Proc. CERN Symposium, 1, 547 (1956).
10. Гладышев В. А., Кацауров Л. Н., Кузнецов А. Н., Мороз Е. М., Нечаева А. П. Атомная энергия, 19, 443 (1965).
11. Rickey M.E., Sampson M.B., Bardin B.M., IEEE Trans. Nucl. Sci., 16, No 3, Part 1, 397 (1969).