Краткие сообщения по физике № 5 май 1970

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Б. Я. Зельдович

Для поля в нелинейной реактивной однородной среде указаны точные интегралы уравнений Максвелла, отвечающие законам сохранения импульса и энергии. Обсуждаются следствия этого закона для некоторых задач о самовоздействии света.

Рассмотрим задачу о распространении мощных электромагнитных волн в первоначально однородной среде. Предположим, что среда является чисто реактивной (непоглощающей), а отклик на поле будем считать мгновенным. Для выполнения последнего предположения необходимо, чтобы все времена релаксации среды были значительно меньше, чем характерное время изменения комплексной амплитуды $\vec{E}(\vec{r},t)$. Эту амплитуду для квазимонохроматического вещественного поля $\vec{E}_{вещ}(\vec{r},t)$ мы вводим определением

$$\vec{E}_{вещ}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + к.с.\right]$$

где ω_0 - некоторая средняя частота. Мы будем рассматривать эффекты самовоздействия света, пренебрегая явлениями типа генерации оптических гармоник.

Указанные предположения относительно однородности, реактивности и безинерционности среды выполнены, если существует вещественная функция $F(\vec{E},\vec{E}^*)$, не зависящая явно от координат и времени, симметричная по $\vec{E}$ и $\vec{E}^*$, и характеризуемая равенствами

$$D_i = \frac{\partial F}{\partial E_i^*},\quad D_i^* = \frac{\partial F}{\partial E_i}. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r},t)$ - комплексный вектор электрической индукции. Соотношения (1) можно представить в виде $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$, где тензор диэлектрической проницаемости ε_{ik} в общем случае зависит от поля: $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(\vec{E})$. Для простоты мы рассматриваем лишь электрическую нелинейность, что типично для светового диапазона.

В качестве примера приведем выражение функции $F(\vec{E},\vec{E}^*)$ и тензора $\varepsilon_{ik}(\vec{E})$ для случая, когда нелинейность обусловлена взаимодействием поля с анизотропными молекулами (высокочастотный эффект Керра):

$$F = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E}^* + \varepsilon_2 \frac{1}{8}\left\{(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)(\vec{E}\cdot\vec{E}^*) + 3(\vec{E}\cdot\vec{E})(\vec{E}^*\cdot\vec{E}^*)\right\} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \frac{3}{4}\varepsilon_2\left\{E_i E_k^* + E_i^* E_k - \frac{2}{3}\delta_{ik}(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\right\} \qquad (2а)$$

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_2\left\{\frac{1}{4}\vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{E}^*) + \frac{3}{4}\vec{E}^*(\vec{E}\cdot\vec{E})\right\} \qquad (2б)$$

Для плоской поляризации выражения (2) сводятся к

$$F = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{2}\varepsilon_2(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)^2 ; \qquad \vec{D} = \vec{E}\cdot\left\{\varepsilon_0 + \varepsilon_2(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\right\} \qquad (3)$$

Для дальнейшего существенно, чтобы величина $\varepsilon_{ik}(\vec{r},t)$ зависела лишь от поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ в той же точке $\vec{r}$ и в тот же момент времени t. Для стрикционного и теплового механизмов нелинейности $\varepsilon(\vec{r},t)$ вообще говоря может зависеть от всего распределения $\vec{E}(\vec{r}',t')$. Поэтому полученные ниже формулы применимы в случае этих механизмов лишь постольку, поскольку можно пользоваться уравнениями (4) с локальной связью $\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{D}(\vec{E}(\vec{r},t))$ и пренебрежимо мало поглощение поля.

В общем случае уравнения Максвелла для комплексных полей имеют вид

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - i\omega_0\vec{D} = c \operatorname{rot}\vec{H}; \qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - i\omega_0\vec{H} = -c \operatorname{rot}\vec{E} \qquad (4)$$

Прямые вычисления показывают, что из (4) и уравнений связи (1) следуют равенства

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\kappa} S_\kappa = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\kappa} G_{i\kappa} = 0 \qquad (6$$

где

$$W = \frac{1}{16\pi}\left\{\vec{H}\cdot\vec{H}^* + \vec{D}\cdot\vec{E}^* + \vec{D}^*\vec{E} - F(\vec{E},\vec{E}^*)\right\} \qquad (7)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{16\pi}\left\{[\vec{E}\vec{H}^*] + [\vec{E}^*\vec{H}]\right\} \qquad (8)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{16\pi c}\left\{[\vec{D}\vec{H}^*] + [\vec{D}^*\vec{H}]\right\} \qquad (9)$$

$$G_{i\kappa} = \frac{1}{16\pi}\left\{\delta_{i\kappa}(\vec{H}\cdot\vec{H}^* + F(\vec{E},\vec{E}^*)) - H_i H_\kappa^* - H_i^* H_\kappa - E_i D_\kappa^* - E_i^* D_\kappa\right\} \qquad (10)$$

Величины W и $\vec{P}$ можно формально интерпретировать как плотности энергии и импульса, а $\vec{S}$ и $\hat{G}$ – соответственно как вектор потока энергии и тензор потока импульса ($\hat{G} = -\hat{T}$, где $\hat{T}$ – тензор натяжений). Подчеркнем, что мы не касаемся сложного вопроса об истинном выражении тензора энергии-импульса для поля в среде – см.[1]. Для нас достаточно того, что соотношения (5), (6) есть прямые следствия системы (1), (4).

Из (5) и (6) получаются законы сохранения "энергии" и "импульса" поля в объёме V:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V W dV\right) = -\oint \vec{S}\, d\vec{f} \qquad (5a)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V P_i dV\right) = -\oint G_{i\kappa}\, df_\kappa \qquad (6a)$$

Существование интегралов типа энергии и импульса прямо связано с инвариантностью уравнений относительно сдвигов в пространстве и времени, т.е. со стационарностью и однородностью исходной среды- сравни[2], § 32. Однако для вывода (5), (6) необходимым является также условие отсутствия диссипации (реактивность среды) и релаксации (мгновенность отклика)*).

Рассмотрим пример задачи, где законы сохранения (5), (6) позволяют предугадать качественный характер ответа без явного решения нелинейных уравнений Максвелла.

При распространении двух волн навстречу друг другу (или под углом) в нелинейной среде возникает пространственная фазовая решетка показателя преломления (см.[3-6]). Пространственный и временной периоды этой решетки как раз таковы, что автоматически выполняются брегговские условия для перекачки энергии из одной волны в другую. В работах А. А. Чабана[5] и В. С. Летохова[6] было высказано утверждение о том, что появление этой решетки должно приводить к эффективному отражению волны в объеме нелинейной среды. Покажем, что это утверждение противоречит равенству (6а).

Величина тензора "натяжений" G_{ik} в слабонелинейной среде приблизительно пропорциональна интенсивности волны. При этом, согласно (10), для волн, распространяющихся вдоль оси x как в положительном, так и в отрицательном направлении, компонента

$$G_{xx} \approx \frac{1}{16\pi}(|H|^2 + \varepsilon|E|^2) \approx \frac{\varepsilon}{8\pi}|E|^2 > 0.$$

На языке формально введенного "импульса" это означает, что распространяющаяся вдоль оси x волна передает вдоль этого направления положительное "давление", независимо от того, в какую сторону волна направлена.

---

*) Эту необходимость можно проиллюстрировать простым примером задачи о распространении поля в линейной слабопоглощающей среде: здесь импульс и энергия поля не сохраняются, несмотря на пространственную однородность и стационарность.

Если бы отражение (перекачка энергии из одной волны в другую) в объеме нелинейной среды было бы возможным, то правая часть x - компоненты равенства (6а) имела бы вид

$$\left[G_{xx}(x_1) - G_{xx}(x_2)\right] \cdot A \neq 0, \tag{11}$$

так как из-за предполагаемой перекачки интенсивность в сечении x_1 не будет равна интенсивности в сечении x_2. (Величина A в (11) - площадь поперечного сечения пучков). Но в стационарной задаче левая часть равенства (6а) равна нулю. Это противоречие означает, что исходное предположение о возможности энергообмена между волнами за счет реактивной нелинейности[5,6] несправедливо.

В отсутствии энергообмена между встречными волнами в реактивной среде с мгновенным откликом легко убедиться и непосредственно, даже для более общей нестационарной задачи. Переходя в уравнении типа

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_2 |E|^2) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0 \tag{12}$$

к медленным амплитудам $E_+(x,t)$ и $E_-(x,t)$:

$$E(x,t) = \exp(-i\omega_0 t)\left[E_+(x,t)e^{ikx} + E_-(x,t)\exp(-ikx)\right],$$

при вещественных ε_0 и ε_2 получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_+ = i\,\frac{\varepsilon_2 \omega^2}{2kc^2}\left(|E_+|^2 + 2|E_-|^2\right)E_+; \tag{13}$$

уравнение для E_- имеет аналогичный вид с заменой + на –. Следует обратить внимание на то, что коэффициент при E_+ в правой части (13) чисто мнимый. Это означает, что правая часть (13) вызывает лишь изменение фазы волны E_+ и не меняет ее амплитуды. В самом деле, вводя $E_+ = |E_+| e^{i\varphi_+}$, из (13) получим

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)|E_+| = 0,
$$
$$
\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_+ = \frac{\varepsilon_2\omega^2}{2kc^2}\left(|E_+|^2 + 2|E_-|^2\right). \qquad (14)
$$

Это и означает отсутствие энергообмена между волнами.

В случае керровского механизма нелинейности результат (14) можно сформулировать так: усиление на вынужденном рассеянии крыла линии Рэлея стремится к нулю, когда разность частот взаимодействующих волн становится много меньше обратного времени релаксации.

Поступила в редакцию
9 марта 1970 г.

Литература

1. Penfield P. jr., Haus H.A. Electrodynamics of Moving Media. MIT Press, Cambridge, Mass., 1967.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
3. Кузнецова Т. И., Раутиан С. Г. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 7, 682 (1964).
4. Островский Л. А., Якубович Е. И. ЖЭТФ, 46, 963 (1964).
5. Чабан А. А. Оптика и Спектроскопия, 24, 805 (1968).
6. Летохов В. С. Письма ЖЭТФ, 3, 413 (1966).