Краткие сообщения по физике № 7 июль 1970

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В. И. Домрин, Р. Р. Рамазашвили

Нелинейные самосогласованные уравнения для плазмы в сильных высокочастотных полях были исследованы в ряде работ. Были найдены усредненные по высокой частоте распределения плотности числа частиц и электрического поля (см. обзоры[1,2]). Однако, эти состояния в ряде случаев неустойчивы. В частности, если ленгмюровская частота электронов где-либо близка к частоте электромагнитной волны ω, относительное движение электронов и ионов в поле волны приводит к раскачке коротких по сравнению с характерным размером неоднородности ленгмюровских волн[3-5]. В тех же областях возможен другой механизм неустойчивости, обусловленный осцилляцией плотности индуцированных зарядов в неоднородной плазме. Такой механизм неустойчивости изучен в работах[6,7], в которых плотность зарядов осциллировала из-за составляющей электрического поля вдоль направления неоднородности. Если такой составляющей нет, неустойчивость, как будет показано ниже, все-таки будет развиваться, так как сила Лоренца будет индуцировать переменную плотность зарядов.

Ограничимся случаем одномерной неоднородности и, пренебрегая быстропеременным движением ионов, будем искать решение уравнений двухжидкостной гидродинамики в виде

$$E_y = E_0(x)\cos\omega t + \Delta E_y(x,t), \qquad E_x = E_{x0}(x) + \Delta E_x(x,t),$$

$$B_z = B_0(x,t) + \Delta B(x,t), \qquad n_i = n_i^0(x),$$

$$n_e = n_e^0(x) + \Delta n(x,t), \qquad \vec{v}_e = \vec{e}_y v_0(x,t) + \Delta\vec{v}(x,t), \qquad (1)$$

где $\vec{e}_y$ – единичный вектор вдоль оси оу, а Δn, $\Delta\vec{v}$, $\Delta\vec{E}$ и ΔB считаются малыми. С помощью стандартной процедуры усреднения получим систему уравнений для величин нулевого приближения. Если дебаевский радиус мал по сравнению с характерным размером неоднородности, можно считать, что $n_e^\circ = n_i^\circ = n^\circ$. Тогда система уравнений для величин нулевого приближения сводится к нелинейному уравнению для определения E_o:

$$\frac{d^2E_o}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_e^2(x)}{\omega^2}\right)E_o = 0, \qquad (2)$$

где $\omega_e^2(x) = 4\pi e^2 n^o(x)/m$, а $n^o(x)$ дается формулой

$$n^o(x) = N\exp\left(-\frac{e^2E_o^2(x)}{8m\omega^2T}\right). \qquad (3)$$

Наиболее подробно эти уравнения исследованы в работе[8].

Воспользовавшись предположением о малости поправок, получим неоднородную систему линейных уравнений для них. Неоднородность этих уравнений обусловлена учетом осциллирующей части силы Лоренца в уравнении движения. С помощью уравнений непрерывности и Пуассона можно исключить из уравнения движения Δn и ΔE_x. Получим

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_e^2(x) + v_T^2\left[\frac{d\ln n^\circ}{dx} - \frac{\partial}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial x}\right\}n^\circ\Delta v_x(x,t) =$$

$$= -\frac{n^\circ e^2}{2m^2\omega}\frac{dE_o^2(x)}{dx}\sin 2\omega t. \qquad (4)$$

Так как для правильности процедуры усреднения по высокой частоте v_T/ω должно быть много меньше раз–

мера неоднородности, то легко написать вынужденное решение этого уравнения вдали от точек резонанса, в которых $\omega_e(x) = 2\omega$:

$$\Delta v_x(x,t) = \Delta v_o(x)\sin 2\omega t = \frac{e^2}{2m^2\omega}\frac{1}{4\omega^2 - \omega_e^2(x)}\frac{dE_o^2(x)}{dx}\sin 2\omega t. \tag{5}$$

С помощью уравнения непрерывности найдем

$$\Delta n(x,t) = \Delta n_o \cos 2\omega t = \frac{e^2}{4m^2\omega^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{n^o(x)}{4\omega^2 - \omega_e^2(x)}\frac{dE_o^2(x)}{dx}\right)\cos 2\omega t. \tag{6}$$

Отсюда, учитывая (3), следует условие малости поправок

$$\frac{A^2}{L_E^2} < \frac{v_T}{\omega L_E} \ll 1, \tag{7}$$

где $\vec{A} = (eE_o/m\omega^2)\vec{e}_y$, а L_E - характерный размер неоднородности поля. Однако, если в плазме есть область, где $\omega_e \simeq 2\omega$, то вынужденное решение уравнения (4) в этой области имеет вид

$$\Delta v_x(x,t) \simeq \frac{e^2}{8m^2\omega^3}\frac{dE_o^2(x)}{dx}\left(\frac{v_T}{2\omega}\frac{d\ln n^o}{dx}\right)^{-2/3}\sin 2\omega t. \tag{8}$$

Что касается уравнений Максвелла для ΔE_y и ΔB, то они, как нетрудно убедиться, описывают эффект возникновения высших гармоник, обусловленный током $ev_o(x,t)\Delta n(x,t)$. Ввиду малости Δn этим явлением будем пренебрегать.

Таким образом, из полученных формул следует, что сила Лоренца вызывает вынужденные колебания плотности числа электронов с частотой 2ω .

Исследуем устойчивость полученного состояния с осциллирующей плотностью зарядов по отношению к раскачке электронных ленгмюровских волн, распространяющихся вдоль оси ох. Из линеаризованной по возмущениям системы уравнений движения и непрерывности электронов и уравнения Пуассона, пренебрегая давлением, получим уравнение для возмущения скорости

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \delta v + \left(\nu + \frac{\partial \Delta v_x(x,t)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta v +$$

$$+\left\{\omega_e^2(x)\left(1 + \frac{\Delta n(x,t)}{n^\circ(x)}\right) + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \Delta v_x(x,t)}{\partial x}\right]\right\}\delta v = 0, \tag{9}$$

где ν - эффективная частота столкновений. С помощью замены

$$x = x' + \int^{t} \Delta v_x(x,\tau)d\tau$$

с точностью до членов второго порядка малости по A/L_E включительно уравнение (9) приведем к виду

$$\frac{\partial^2 \delta v}{\partial t^2} + \left(\nu + \frac{\partial \Delta v_x(x',t)}{\partial x'}\right)\frac{\partial \delta v}{\partial t} +$$

$$+ \omega_e^2(x')\left\{1 + \frac{1}{2\omega}\left(1 + \frac{4\omega^2}{\omega_e^2(x')}\right)\frac{d\Delta v_0(x')}{dx'}\cos 2\omega t\right\}\delta v = 0. \tag{10}$$

Отметим, что учет давления электронов привел бы в приближении геометрической оптики к замене $\omega_e^2(x')$ в последнем слагаемом этого уравнения на $\omega_e^2 + k^2 v_T^2$, где k - волновое число.

Уравнение (10) сводится к уравнению Матье. Обозначая $\omega - \omega_e(1 - \nu^2/4\omega_e^2)^{1/2}$ через $\delta/2$ и считая, что

$\delta \ll \omega$, запишем инкремент неустойчивости рассматриваемой системы

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2\omega_e^2 - \delta^2} - \frac{\nu}{2}, \qquad (11)$$

где

$$\beta \simeq \frac{1}{2}\left\{A\,\frac{d^2A}{dx^2} + \left(\frac{dA}{dx}\right)^2\left(1 - \frac{\omega^2A^2}{12v_T^2}\right)\right\}.$$

Условие положительности γ фактически определяет область возникновения неустойчивости, так как ω_e зависит от x.

В сильных полях $\left(A \gg \frac{v_T}{\omega}\right)$, когда диссипацией можно пренебречь, максимальный инкремент имеет вид

$$\gamma_{max} \simeq \frac{1}{96}\frac{\omega^2A^2}{v_T^2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2\omega \simeq \frac{3}{16}\,\frac{\Delta n_o}{n^o}\,\omega. \qquad (12)$$

При $(\omega^2A^2/v_T^2)(dA/dx)^2 \simeq 5$ этот инкремент для водородной плазмы сравнивается по величине с максимальным инкрементом $\gamma_o = (J_1^2(\vec{k}\vec{A})m/2m_i)^{1/3}\omega_e$, найденным в работе[3]. Однако при этом $\Delta n_o/n^o \sim 1/5$, что находится на границе области применимости полученных формул. В случае плазмы тяжелых газов γ_o существенно уменьшается, и время развития неустойчивости будет определяться найденным здесь механизмом.

Приравняв правую часть (11) нулю при $\delta = 0$, найдем минимальное пороговое значение β, необходимое для возникновения неустойчивости, откуда можно определить порядок величины порогового значения поля E_o:

$$\Lambda^2 \equiv \frac{E^2_{o\,пор}}{4\pi n^o T} \simeq 4\,\frac{\nu}{\omega}\left(\frac{\omega L_E}{v_T}\right)^2. \qquad (13)$$

Это выражение получено в пределе слабых полей $(A \ll \frac{v_T}{\omega})$, так как неустойчивость, исследованная в работах[4,5], начинается при малых напряженностях поля. Найденное значение Λ^2 отличается от вычисленного в работах[4,5] большим множителем $(\omega L_E/v_T)^2$.

Подводя итог, можно сказать, что найденная здесь неустойчивость развивается при $\omega \approx \omega_e$, как и параметрическая неустойчивость, исследованная в работах[3–5], но начинается она при больших величинах напряженности поля. Однако в сильных полях неустойчивость, обусловленная неоднородностью, может развиваться быстрее неустойчивости, связанной с относительным движением зарядов в поле волны.

Выражаем благодарность Ю. М. Алиеву, Л. М. Горбунову и В. П. Силину за полезные советы и обсуждения.

Поступила в редакцию
29 апреля 1970 г.

Литература

1. Motz H., Watson C. J. H., Adv. in Electronics and Electron Physics, 23, 153 (1967).
2. Горбунов Л. М. Препринт ФИАН, № 174, 1969.
3. Силин В. П., ЖЭТФ 48, 1679 (1965).
4. Nishikawa K. J. Phys. Soc. Japan, 24, 1152 (1968).
5. Андреев Н. Е., Кирий А. Ю., Силин В. П. ЖЭТФ 57, 1028 (1969).
6. Krenz J. H., Kino J. S. J. Appl. Physics, 36, 2387 (1965).
7. Рамазашвили Р. Р. ЖЭТФ 53, 2168 (1967).
8. Волков Т. Ф. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. т. 3, стр. 336 (1958). Изд. АН СССР.
9. Тумаркин С. А. Прикладная математика и механика, 23, 1083 (1959).
10. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ (1953).