

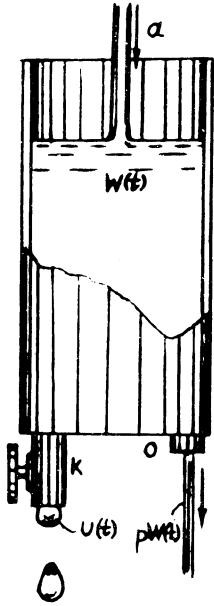
## ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ КОЛЕБАНИЙ РЕЛАКСАЦИОННОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд

В работе<sup>1</sup> при анализе уходов фазы циклической активности Солнца на больших интервалах времени  $T$  по таблицам<sup>2</sup> дат сильных полярных сияний было обнаружено необычное поведение дисперсии набега фазы. Довольно быстрый рост дисперсии, пропорциональный времени при  $T < 4T_0$  ( $T_0$  - период), затем замедляется и практически прекращается при  $T > 6T_0$ . Это привело к поискам источника стабильных колебаний, синхронизирующих автогенератор солнечной активности. Такой источник не был найден.

В заметке<sup>3</sup> на примере релаксационного автогенератора на газоразрядной лампе без утечки была показана возможность искомой зависимости дисперсии фазы от времени без синхронизации стабильными колебаниями. Проведем здесь более общее рассмотрение, позволяющее, в частности, учесть влияние утечки. Обратимся для иллюстрации к механическому автогенератору (рис. 1). Пусть в достаточно высокий цилиндрический сосуд вливается со строго постоянной скоростью  $a$  жидкость, выливающаяся через кран (к) отдельными каплями; жидкость может вытекать и через другое отверстие (о), моделирующее утечку. Скорости истечения через (к) и (о) определяются количеством жидкости в сосуде, истечение через кран зависит и от положения крана. При неизменном его положении истечение через кран было бы периодическим. Для моделирования короткокоррелированных флуктуаций кран

быстро (по сравнению с этим периодом) хаотически поворачивается, так что числа капель, образовавшихся за сравнительно небольшие неперекрывающиеся интервалы времени, практически независимы. Соответственно



Р и с. 1. Гидромеханический автогенератор релаксационных колебаний.

но с этим дисперсия числа капель пропорциональна  $T$ . Иначе будет на больших интервалах времени.

При закрытом отверстии (0) обозначим  $w_{\max}$  максимальное количество жидкости, которое установилось бы при неизменном минимальном раскрытии крана (пусть полного перекрытия не бывает),  $w_{\min}$  - минимальное, при максимальном раскрытии крана. Ни при каком  $T$  разница масс жидкости, вытекшей за это время через (k) и втекшей в сосуд, не превысит  $w_{\max} - w_{\min}$ , поэтому дисперсия числа капель всегда ограничена величиной  $[(w_{\max} - w_{\min})/U_{\min}]^2$ ,  $U_{\min}$  - минимальная масса капли. Таким образом при отсутствии утечки рост дисперсии фазы, вначале пропорциональный  $T$ ,

с увеличением  $T$  полностью прекращается. Аналогично рассуждая, увидим, что малой утечке соответствует при больших  $T$  асимптотически линейный рост дисперсии фазы, значительно более медленный, чем на начальном участке пропорционального  $T$  роста.

Перейдем к формулам. Обозначим  $W(t)$  мгновенную массу жидкости в сосуде,  $U(t)$  - массу в краине, и напишем уравнения в виде

$$\frac{dW}{dt} = a - PW - F, \quad (1)$$

$$\frac{dU}{dt} = qW + F - f(U, \frac{dU}{dt}), \quad (2)$$

где  $qW + F$  - скорость оттока через край ( $k$ ),  $q > 0$ ,  $P = p + q$ ,  $pW$  - скорость оттока из сосуда через отверстие ( $o$ ),  $p \geq 0$ ,  $F(t)$  - коротко-коррелированные стационарные флуктуации,  $f$  - скорость вытекания из крана:

$$f(U, dU/dt) = \begin{cases} 0, & \text{если } U_1 < U < U_2, dU/dt \geq 0 \text{ или } U \leq U_1; \\ b, & \text{если } U_1 < U < U_2, dU/dt < 0 \text{ или } U \geq U_2; \end{cases}$$

$$b > aq/p. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$W(t) = a/P + \psi(t)/q, \quad (4)$$

$$\psi(t) \equiv - q \exp(-Pt) \int_{-\infty}^t F(\xi) \exp(P\xi) d\xi. \quad (5)$$

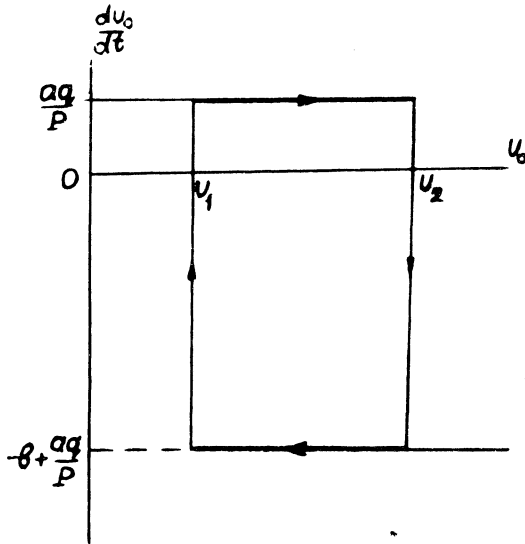
Подставляя (4) в (2), получим уравнение колебаний автогенератора

$$\frac{dU}{dt} = \frac{aq}{P} - f(U, \frac{dU}{dt}) + \psi + F. \quad (6)$$

Для фазы колебаний  $\theta(t)$  находим (рис. 2):

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_i = \frac{dU/dt}{A_i},$$

$$A_i = \begin{cases} \frac{aq}{P}, & \text{если } U \ll U_1 \text{ или } U_1 < U < U_2, \frac{dU}{dt} \geq 0, (i = 1), \\ -b + \frac{aq}{P}, & \text{если } U \geq U_2 \text{ или } U_1 < U < U_2, \frac{dU}{dt} < 0, (i = 2). \end{cases} \quad (7)$$



Р и с. 2. Динамическая траектория установившихся колебаний  $U_0(t)$  автогенератора на фазовой плоскости.

Из тождества  $dt \equiv dU/\frac{dU}{dt}$  и формул (6), (7) найдем для набега фазы  $\gamma(t) \equiv \theta(t) - t$

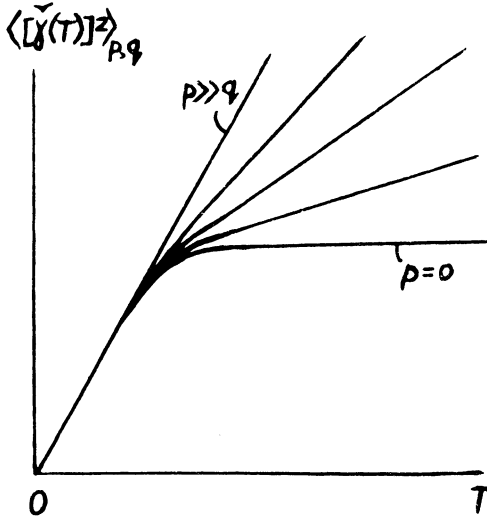
$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_i = \frac{dU/dt}{A_i} - 1 = \frac{\Psi + F}{A_i}. \quad (8)$$

Используя формулу (4), последовательно напишем

$$\Psi + F = - \left( \frac{dW}{dt} + pW - \frac{ap}{P} \right), \quad (9)$$

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_i = - \frac{d\omega/dt + p\omega}{A_i}, \quad \omega(t) \equiv W(t) - \langle W(t) \rangle, \quad \langle W(t) \rangle = \frac{a}{P}.$$

Отсюда уже ясно, что при  $P = 0$  дисперсия набега фазы ограничена. При  $P \neq 0$  дисперсия фазы растет с  $T$  асимптотически линейно: согласно (1) дисперсия процесса  $W(t)$  ограничена, но, если  $F(t)$  - белый шум, то



Р и с. 3. Зависимость дисперсии набега фазы автоколебаний от времени наблюдения.

дисперсия интеграла от  $W(t)$  растет по диффузионному закону.

Для простоты расчета ограничимся здесь предельным случаем  $b \gg a$ , т.е. капля отрывается мгновенно. Тогда

$$\frac{d\check{\gamma}}{dt} = \left(\frac{d\check{\delta}}{dt}\right)_1 = -\frac{P}{aq} \left(\frac{d\omega}{dt} + p\omega\right),$$

$$\check{\gamma}(T) = \frac{P}{aq} \left[ \omega(t) - \omega(t+T) - p \int_t^{t+T} \omega(\xi) d\xi \right],$$

$$\check{\delta}_t(T) \equiv \check{\gamma}(t+T) - \check{\gamma}(t)$$

$$\langle [\check{\delta}(T)]^2 \rangle = 2\langle \omega^2 \rangle \left(\frac{P}{aq}\right)^2 \left\{ \frac{p^2}{P} T + \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^2\right] \cdot [1 - \exp(-PT)] \right\}.$$

Таким образом имеем (рис. 3)

$$\langle [\dot{\gamma}(T)]^2 \rangle \approx 2 \langle \omega^2 \rangle \left( \frac{P}{aQ} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{P}{P} \right)^2 + \frac{P^2}{P} T \right] \equiv D_0 + D_1 T$$

при  $PT \gg 1$ ,

$$\langle [\dot{\gamma}(T)]^2 \rangle \approx 2 \langle \omega^2 \rangle \left( \frac{P}{aQ} \right)^2 \cdot PT \equiv D_2 T \quad \text{при } PT \ll 1.$$

Отношение скоростей роста при больших и малых временах наблюдения

$$D_1/D_2 = (P/P)^2 = (P/W)/a^2$$

равно квадрату отношения средней скорости утечки к скорости наполнения сосуда.

Поступила в редакцию  
9 июня 1970 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд. *Астроном. журн.*, 43, 1 (1966).
2. Н. Fritz. *Die Beziehungen der Sonnenflecken zu den magnetischen Erscheinungen*. Haarlem, (1873).
3. Л. И. Гудзенко. *Радиофизика* 12, 12 (1969).