О ПОЛОЖЕНИИ ГРАНИЦЫ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ПЕРЕНОСА В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

А. В. Степанов

Как известно, положение дискретных собственных значений относительно области непрерывного спектра оператора переноса нейтронов определяет характер эволюции распределения нейтронов во времени (эксперимент с импульсным источником) и в пространстве (экспоненциальный эксперимент). Этот вопрос довольно подробно исследован в случае прохождения нейтронов через гомогенные среды. Значительно менее изучен практически интересный случай неоднородных систем. Рассмотрим задачу о стационарном переносе моноэнергетических нейтронов в гетерогенных средах. Ранее[1] было показано, что $\langle g(\vec{p},\vec{n})\rangle$ - Фурье-компонента среднего потока нейтронов от точечного изотропного источника удовлетворяет приближенному кинетическому уравнению

$$\left[i\vec{p}\vec{n} - \langle\Sigma_t\rangle - \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{q}\,k_{tt}(\vec{q})}{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{n} - \langle\Sigma_t\rangle}\right]\langle g(\vec{p},\vec{n})\rangle + \int d\vec{n}'\,W(\vec{p};\vec{n},\vec{n}')\langle g(\vec{p},\vec{n})\rangle = -1. \qquad (1)$$

Здесь

$$k_{tt}(\vec{q}) = \int d\vec{r}\,\exp(i\vec{q}\vec{r})\,K_{tt}(\vec{r}), \qquad (2)$$

$$K_{tt}(\vec{r}-\vec{r}') = \left\langle\left[\Sigma_t(\vec{r}) - \langle\Sigma_t\rangle\right]\left[\Sigma_t(\vec{r}') - \langle\Sigma_t\rangle\right]\right\rangle \qquad (2a)$$

– корреляционная функция флуктуаций полного макроскопического сечения. Символ $<\ldots>$ означает усреднение по статистическому ансамблю неоднородных сред; $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении движения нейтрона. Ядро $W(\vec{p},\vec{n},\vec{n}')$ при $\mathrm{Re}\,p = 0$, $|\mathrm{Im}\,p| \ll <\Sigma_t>$ является непрерывной функцией угловых переменных (конкретное выражение для W получено в работе[1]). Решение уравнения (1) может быть найдено с помощью какой-либо из известных вычислительных процедур, например, методом сферических гармоник. В частности, расчет в P_I – приближении позволяет получить аналитическое выражение для $\varkappa_0$ – постоянной затухания асимптотической части среднего нейтронного потока ($\varkappa_0 = \pm\, ip_0$, $\mathrm{Re}\,p_0 = 0$, $|\mathrm{Im}\,p_0| \ll <\Sigma_t>$). Такой подход, однако, не позволяет установить соотношение между $\varkappa_0$ и $p_{гр}$; $p_{гр}$ – граничная точка непрерывного спектра уравнения (1) на мнимой оси в плоскости комплексного переменного p. Принимая во внимание, что в интересующей нас области ($\mathrm{Re}\,p = 0$, $|\mathrm{Im}\,p| \ll <\Sigma_t>$) ядро $W(\vec{p};\vec{n},\vec{n}')$ – непрерывная функция угловых переменных, можно ограничиться при анализе непрерывного спектра уравнения (1) рассмотрением следующего более простого уравнения*)

$$\hat{L} <g(\vec{p},\vec{n})> \equiv \left[i\vec{p}\vec{n} - <\Sigma_t> - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{q}\, k_{tt}(\vec{q})}{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{n} - <\Sigma_t>} \right] \times$$

$$\times <g(\vec{p},\vec{n})> = -1. \qquad (3)$$

Тогда $p_{гр}$ определяется как минимальное значение

*) Строго говоря, такое утверждение доказано для операторов более простого вида, чем $\hat{L}$ [2]. Тем не менее переход от уравнения (1) к уравнению (3) представляется оправданным с физической точки зрения: интересующая нас область непрерывного спектра обусловлена нейтронами, не испытавшими рассеяния. Уравнение (3) описывает прохождение через среду этой группы нейтронов.

$p \in \left[\mathrm{Re}\,p = 0, \quad |\mathrm{Im}\,p| < \langle \Sigma_t \rangle \right]$, при котором выражение в квадратных скобках в (3) обращается в нуль, а функция Грина $\langle g(\vec{p},\vec{n}) \rangle$ становится сингулярной. Рассмотрим некоторые примеры.

а) Изотропная среда, $k_{tt}(\vec{q}) \equiv k_{tt}(q)$. В этом случае можно показать, что $p_{гр}$ удовлетворяет уравнению

$$py = -i\langle \Sigma_t \rangle + \frac{i}{16\pi^3} \int \frac{d\vec{q}\,k_{tt}(q)}{q} \left[\mathrm{arctg}\,\frac{q - py}{\langle \Sigma_t \rangle} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{arctg}\,\frac{q + py}{\langle \Sigma_t \rangle} + \frac{1}{2} \ln \frac{(q + py)^2 + \langle \Sigma_t \rangle^2}{(q - py)^2 + \langle \Sigma_t \rangle^2} \right] = 0,$$

$$(-1 \leqslant y \leqslant 1). \qquad (4)$$

Будем искать $p_{гр}$ в следующем виде*)

$$p_{гр} = \pm r \langle \Sigma_t \rangle + \delta. \qquad (5)$$

Подставляя это выражение в (4), получим при $\delta\, l \ll 1$

$$\delta \approx \mp i \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{q}\,k_{tt}(q)}{q} \approx \pm i \frac{\pi}{2} \varepsilon_{tt} l \qquad (6)$$

Здесь l – эффективный размер неоднородности в среде, ε_{tt} – дисперсия случайной функции $\Sigma_t(r)$. Сравнивая $p_{гр}$(5) – (6) с $\varkappa_0$ [I], находим, что (при $\langle \Sigma_t \rangle \gg \varkappa_0$) $p_{гр} \gg \varkappa_0$, т.е. в этом случае дискретное собственное значение $\varkappa_0$ лежит вне области, занятой непрерывным спектром.

б) Если среда анизотропна, то $p_{гр}$ зависит от направления движения нейтронов по отношению к неодно-

---

*) Напомним, что в случае однородной среды $\hat{p}_{гр} = \pm i \langle \Sigma_t \rangle$.

родностям среды. В том случае, когда нейтроны распространяются вдоль неоднородностей среды (слоев или цилиндрических каналов) $\vec{q}\hat{n} \equiv 0$ и $p_{гр}$ определяется выражением

$$p_{гр} = \pm i \langle\Sigma_t\rangle \left[1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_{tt}}}{\langle\Sigma_t\rangle}\right]. \tag{7}$$

Этот результат справедлив при $\sqrt{\varepsilon_{tt}}/\langle\Sigma_t\rangle \ll 1$. В практически интересном случае системы с пустыми каналами это неравенство не выполняется и необходим более тщательный анализ. Учитывая вклады высших корреляционных функций макроскопического сечения (а не только k_{tt}), получим что $p_{гр}$ в случае произвольных значений $\sqrt{\varepsilon_{tt}}/\langle\Sigma_t\rangle$ определяется следующим выражением

$$p_{гр} = \pm i(\Sigma_t)_{min}. \tag{8}$$

Здесь $(\Sigma_t)_{min}$ - минимальное значение поперечного сечения в системе (оно соответствует некоторой i-той компоненте). В частности, для системы с пустотами непрерывный спектр заполняет всю мнимую ось $\mathrm{Im}\,p$ и средний поток убывает с расстоянием от источника, строго говоря, неэкспоненциально.*)

в) В том случае, когда нейтроны распространяются перпендикулярно образующим цилиндрических блоков, $p_{гр}$ определяется выражением типа (5) - (6), где l - - характерный размер неоднородности среды в направлении движения нейтрона ($l \sim R$, R - радиус цилиндра).

г) Средний поток нейтронов, движущихся перпендикулярно слоям одномерной решетки, осциллируя, убывает с постоянной затухания $\langle\Sigma_t\rangle$. Это означает, что в этом случае $p_{гр} = \pm i \langle\Sigma_t\rangle$.

---

*) Этот результат был получен ранее другими методами в работах[3].

Таким образом гетерогенность среды оказывает наибольшее влияние на характер зависимости потока нейтронов от расстояния до источника, когда нейтроны распространяются параллельно неоднородностям среды, и может вызвать отклонения от экспоненциального закона затухания. Этот же вывод остается в силе и в случае стационарной диффузии немоноэнергетических нейтронов. Если в гетерогенную среду помещен импульсный источник, от граница непрерывного спектра значений постоянных затухания импульса нейтронов определяется величиной $(v\Sigma_t(v))_{min}$ (v - скорость нейтронов). Это значение отвечает некоторой компоненте среды и, в частности, для системы с пустыми каналами оно равно нулю.*) Если же эволюцию распределения нейтронов описывает усеченное кинетическое уравнение (без области малых скоростей), то положение оказывается более сложным и необходимо детальное рассмотрение.

В заключение автор благодарит М. В. Казарновского за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
26 июня 1970 г.

---

*) Смотри также работу Деница и др.[4]

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Степанов. Атомная энергия, 22, 271 (1967); 11, 125, 148 (1968).
2. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу, М. ИИЛ, 1954 г.
3. B. Clancy et al. J. Nucl. Energy, 22, 445 (1968).
   M. M. R. Williams. Nukleonik, 12, 129 (1969).
4. V. Deniz et al. Nucl. Sci. Engng., 32, 201 (1968).