УДК 536.2

КАКАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ СТОИТ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ?

С. Н. Андреев, А. А. Самохин

Обращается внимание на несогласованность и противоречивость форм записи уравнения теплопроводности для неподвижной жидкости в различных физических изданиях. Показано, что при последовательном рассмотрении полной гидродинамической системы уравнений ответ на вопрос о величине теплоемкости (c_p или c_v) в уравнении теплопроводности не вызывает сомнений. Приведен нетривиальный пример решения уравнения теплопроводности $T(x,t)$, которое обеспечивает неподвижность среды с постоянным полным объемом и зависящими от температуры величинами плотности и коэффициента теплопроводности.

Уравнение теплопроводности в случае неподвижной изотропной жидкости, которое можно найти во многих монографиях и учебных пособиях, имеет вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + Q. \tag{1}$$

В этом уравнении T – температура, t – время, ∇ – оператор градиента, κ – теплопроводность жидкости, ρ – плотность жидкости, Q – источники и стоки тепла, c – удельная теплоемкость, величине которой посвящена основная часть данной заметки. Если жидкость не является неподвижной, то в левой части уравнения (1) присутствует дополнительный конвективный член $v(\partial T/\partial z)$, где v обозначает скорость движения жидкости. Для случая постоянного коэффициента теплопроводности уравнение (1) переписывается в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c}, \tag{2}$$

где $\chi = \kappa/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности.

В "Гидродинамике" Ландау и Лифшица [1] уравнения (1) и (2) с теплоемкостью при постоянном давлении $c = c_p$ получаются из общего уравнения переноса тепла

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla s\right) = \nabla\cdot(\kappa\nabla T) + Q, \tag{3}$$

при учете зависимости энтропии единицы массы s от давления и температуры с последующими предположениями о постоянстве давления p и равенстве нулю конвективной скорости v (см. [1], §50). Для простоты в формуле (3) не учитывается диссипация, обусловленная вязкостью жидкости.

Однако отсутствие движения в жидкости означает сохранение ее удельного объема в каждой точке, и поэтому в уравнении (1) в этом случае должна стоять теплоемкость при постоянном объеме c_v, а не c_p. Это противоречие является кажущимся, поскольку предположение о неподвижности среды без каких-либо ограничений на эволюцию температурного профиля $T(x,t)$ в жидкости означает, фактически, отсутствие у нее теплового расширения, т.е. коэффициент теплового расширения $\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = 0$. При $\beta \neq 0$ изменения температурного профиля $T(x,t)$ приводят в общем случае к изменению плотности $\rho(x,t)$ и появлению, согласно уравнению неразрывности, отличной от нуля конвективной скорости, т.е. жидкость перестает быть неподвижной. В соответствии с термодинамической формулой

$$c_p - c_v = c_v(\gamma - 1) = \rho T\beta^2\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T \tag{4}$$

предположение $\beta = 0$ означает равенство теплоемкостей при условии $\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \neq 0$. Таким образом, в уравнении (1) при сделанных предположениях $c = c_p = c_v$, что и является частью ответа на вопрос о величине теплоемкости в уравнении теплопроводности для неподвижной жидкости.

Между тем, в [1] специально подчеркивается, что "...здесь должна быть взята теплоемкость c_p, так как вдоль неподвижной жидкости давление должно быть, разумеется, постоянным". Такое утверждение может вводить в заблуждение, тем более, что во многих учебных пособиях этот вопрос скорее запутывается, чем должным образом проясняется.

В монографиях [1, 2] в уравнении теплопроводности стоит величина c_p. В то же время в ряде других изданий [3 – 6] в качестве теплоемкости указана величина c_v. В некоторых книгах, например [7 – 9], величина теплоемкости c не уточняется.

В учебном руководстве [10] в §4 из главы XIII уравнение теплопроводности на стр. 216 содержит теплоемкость c_p, а на стр. 217 при оценке коэффициента теплопроводности входящая в него величина c_v заменяется "... на не сильно отличающуюся от нее величину c_p, которая появляется при более строгом рассмотрении...".

В книге [11] на стр. 28 уравнение теплопроводности, записанное в форме (1), содержит теплоемкость c_v, а на стр. 30 в уравнение, эквивалентное уравнению теплоемкости в форме (2), входит коэффициент температуропроводности χ, содержащий c_p. При этом отмечается: "Как это принято, мы пренебрегаем разницей χ и $\gamma\chi$ в уравнении теплопроводности, поскольку для конденсированных сред обычно $\gamma - 1 \leq 1$".

Наконец, в книге [12] в случае, если "... изменения температуры в среде невелики, скорости движения вещества гораздо меньше скорости звука и при излучении тепла путем теплопроводности движением вещества можно пренебречь, считая, что процесс происходит при постоянном давлении", уравнение теплопроводности содержит c_p. Однако при рассмотрении лучистого механизма переноса тепла "...вместо теплоемкости при постоянном давлении c_p в уравнение следует подставлять теплоемкость при постоянном объеме c_v".

Очевидно, что величина теплоемкости в уравнении теплопроводности зависит от рассматриваемого процесса. Это обстоятельство можно проиллюстрировать с помощью линеаризованной системы гидродинамических уравнений:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p, \; \rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + Q, \tag{5}$$

где индексом "0" отмечены невозмущенные величины. Выражая ρ через удельную энтропию s и давление p, получаем:

$$\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p\right) = \frac{1}{c_v}\left\{\nabla \cdot \left(\kappa \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\right\}, \tag{6}$$

где v_s – скорость звука в среде $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$. При выводе формулы (6) было учтено, что:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = -\rho_0 \beta \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = -\rho_0 \beta \frac{T_0}{c_p}. \tag{7}$$

Обращение в нуль правой части уравнения (6) приводит к волновому уравнению распространения звука без затухания.. Затухание звука за счет теплопроводности связано с первым членом в фигурных скобках в правой части (6), а второй член в этих скобках определяет изменение давления при действии внешнего источника Q. При условии пренебрежимой малости первого члена по сравнению со вторым уравнение (6) для давления оказывается замкнутым, если известно выражение для $Q(x,t)$. В более общем случае это уравнение дополняется уравнением теплопроводности.

Используя в качестве независимых переменных (p,T) и (p,ρ), из линеаризованного уравнения для изменения энтропии (5) можно получить две эквивалентные формы линеаризованного уравнения теплопроводности:

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T_0}\right)_p \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla\cdot(\kappa\nabla T) + Q, \tag{8}$$

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T_0}\right)_p \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla\cdot(\kappa\nabla T) + Q. \tag{9}$$

Если процесс нагрева вещества происходит достаточно медленно, то второй производной давления по времени в левой части (6) можно пренебречь. Этому случаю соответствует пренебрежение в уравнении (8) членом, содержащим производную давления по времени. В результате такого приближения формирование профиля давления в области прогрева определяется уравнением теплопроводности с теплоемкостью при постоянном давлении c_p. Отметим, что изменение давления в этом случае связано с медленным конвективным движением жидкости в результате ее теплового расширения. В случае $\beta = 0$ давление остается постоянным.

В случае быстрого нагрева вещества можно, напротив, пренебречь величиной Δp по сравнению со второй производной по времени в левой части уравнения (6). При этом уравнение (6) будет содержать теплоемкость c_v, поскольку величина $\frac{\gamma}{\beta v_s^2} = \rho_0\left(\frac{\partial T_0}{\partial p_0}\right)_\rho$ определяется уравнением состояния и не зависит от теплоемкости [13]. В уравнении (9) при быстром нагреве вещества можно пренебречь членом, содержащим производную плотности по времени. В результате формирование профиля давления в этом случае определяется уравнением теплопроводности с теплоемкостью при постоянном объеме c_v.

Необходимо отметить, что при определенных условиях можно обеспечить постоянство удельного объема в каждой точке и при медленном нагреве для вещества с отличным от нуля коэффициентом теплового расширения β и неоднородным температурным профилем $T(x,t)$. Поскольку неподвижность жидкости означает, что давление в ней не зависит от координат, а плотность – от времени, то в случае идеального газа из этих условий следует возможность факторизации температурного профиля $T(x,t) = mp(t)/\rho(x)$, где m – масса молекулы газа (постоянную Больцмана k полагаем равной единице).

В качестве примера рассмотрим идеальный газ с зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности $\kappa = \epsilon\sqrt{p/\rho} \sim \sqrt{T}$ [4]. Если газ неподвижен (конвективный член в уравнении теплопроводности обращается в нуль), то в уравнении (1), как уже отмечалось выше, должна стоять теплоемкость при постоянном объеме c_v.

Уравнение (1) без источников ($Q = 0$) для идеального газа в одномерном случае в предположении о факторизации решения $T(x,t) = mp(t)/\rho(x)$ может быть записано в виде:

$$\frac{1}{p^{3/2}}\frac{\partial p(t)}{\partial t} = \frac{\epsilon}{c_v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho^{5/2}}\frac{\partial \rho(x)}{\partial x}\right) = \lambda, \tag{10}$$

где λ – константа. Из левой части уравнения (10) можно получить зависимость давления от времени $p(t)$:

$$\sqrt{p} = \frac{\sqrt{P_0}}{1-\nu t},\ 1-\nu t > 0, \tag{11}$$

где P_0 – начальное значение давления в газе, $\nu = \lambda\sqrt{P_0}/2$ – константа, имеющая размерность частоты. Получая из правой части (10) зависимость $\rho(x)$, найдем окончательное выражение для температурного профиля $T(x,t)$:

$$T(x,t) = \frac{T_0(x)}{(1-\nu t)^2},$$

$$T_0(x) = T_0(0)\left\{1 + \frac{x}{l}\left[\left(\frac{T_0(l)}{T_0(0)}\right)^{3/2} - 1\right] - \frac{3}{4}\xi l^2\left(\frac{mP_0}{T_0(0)}\right)^{3/2}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right\}^{3/2}, \tag{12}$$

где $T_0(x)$ – температурный профиль в начальный момент времени, $T_0(0)$ и $T_0(l)$ – соответственно значения начального температурного профиля при $x = 0$ и $x = l$; $\xi = \frac{2\nu c_v}{\epsilon\sqrt{P_0}}$. Устойчивость решения (12) относительно малых возмущений с отличным от нуля значением конвективной скорости в данной работе не рассматривается. Отметим, что температурный профиль (12) обеспечивает линейную зависимость теплового потока от координаты.

Эволюция температурного профиля (12) определяется граничными условиями при $x = 0$ и $x = l$, которые следуют из вида температурного профиля. Случай $\nu > 0$ соответствует нагреву вещества, при этом температурный профиль оказывается вогнутым. При $\nu < 0$ температурный профиль является выпуклым, что соответствует охлаждению. Начальный температурный профиль может быть создан, например, путем быстрого неоднородного нагрева среды при поглощении в ней лазерного излучения с соответствующим пространственным распределением интенсивности.

Используя (12) и уравнение состояния идеального газа, можно найти полную массу газа в объеме $V = S \cdot l$, где S – площадь:

$$M = S \int_0^l \rho(x) dx = S \int_0^l \frac{mP_0}{T_0(x)} dx,$$

что позволяет выразить начальное давление P_0 через величину M.

В стационарном случае $\nu = 0$ выражения для температуры (12) и давления (11) принимают особенно простой вид:

$$T_0(x) = T_0(0) \left\{ 1 + \left[\left(\frac{T_0(l)}{T_0(0)} \right)^{3/2} - 1 \right] \frac{x}{l} \right\}^{2/3}, \tag{13}$$

$$P_0 = \frac{M}{3mV} \left[T_0(0) + T_0(l) + \sqrt{T_0(0) T_0(l)} \right].$$

В этом случае давление $p = P_0 = \text{const}$ не зависит от времени, а температура зависит только от координаты. При $T_0(0) = T_0(l) = T_0$ зависимость температуры от координаты пропадает и (13) сводится к тривиальному случаю однородного распределения температуры $T = \text{const}$. Заметим, что линейный (не горизонтальный) температурный профиль при $T_0(0) \neq T_0(l)$ не является решением данной задачи из-за температурной зависимости коэффициента теплопроводности.

Таким образом, в данной работе показано, что вопрос о величине теплоемкости в уравнении теплопроводности однозначно решается с учетом полной системы гидродинамических уравнений в зависимости от рассматриваемого процесса. В случае неподвижной жидкости в уравнении (1) должна стоять, очевидно, теплоемкость при постоянном объеме c_v, однако условие неподвижности среды для произвольного температурного профиля фактически эквивалентно равенству $c_v = c_p$. В работе также приведен нетривиальный пример решения уравнения теплопроводности для идеального газа с постоянным полным объемом и зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности, которое обеспечивает постоянство неоднородного распределения плотности в процессе эволюции температурного профиля $T(x, t)$.

Авторы выражают благодарность В. П. Макарову за инициирующие и стимулирующие обсуждения данного вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика, М., Наука, 1986.

[2] Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики, М., Наука, 1969, §109.

[3] Lamb H. Hydrodynamics, New York, Dover Publications, 1945, Chap. XI.

[4] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика, М., Наука, 1979, §52.

[5] Зубарев Д. Н. Физический энциклопедический словарь, М., Советская Энциклопедия, 1983, с. 748.

[6] Рейф Ф. Статистическая физика, М., Наука, 1986, §8.3.

[7] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, М., Наука, том. 2, глава 3, 1977.

[8] Киттель Ч. Введение в физику твердого тела, М., ГИФМЛ, 1963, глава 6.

[9] Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике, М.-Л., Изд-во АН СССР, 1947, глава 1.

[10] Райзер Ю. П. Физика газового разряда, М., Наука, 1987, с. 216.

[11] Гусев В. Э., Карабутов А. А. Лазерная оптоакустика, М., Наука, 1991, с. 28.

[12] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., Наука, 1966, гл. X, §§1 – 2.

[13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, часть 1, М., Наука, 1976.

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 24 ноября 2003 г.