*Краткие сообщения по физике № 12 декабрь 1970*

# О ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА БЕЗЖЕЛЕЗНЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

В. С. Воронин

В последние годы проявляется большой интерес к безжелезным магнитным системам, особенно в связи с достижениями технологии сверхпроводников и криогенной техники. В безжелезных системах форма магнитного поля определяется исключительно конфигурацией проводников с током, и нахождение конфигураций, создающих магнитное поле нужной формы, является важной задачей, возникающей при разработке таких систем. Обычным условием при этом является требование отсутствия проводников в рабочей области магнитной системы, где магнитное поле должно иметь заданную форму. Форма поля вне этой области может быть более или менее произвольной. При этих условиях задача поиска нужной конфигурации имеет, в принципе, неоднозначное решение и относится к типу задач синтеза, подобных, например, задачам синтеза антенн по заданной диаграмме направленности или электрических цепей по их характеристикам. В данной работе предлагается прямой и достаточно простой метод решения этой задачи.

Прежде всего отметим, что условие отсутствия токов в рабочей области накладывает довольно сильное, но неизбежное ограничение на разнообразие возможных форм магнитного поля, которое становится, по существу, двумерным. Действительно, любое гармоническое в некоторой области векторное поле однозначно определяется граничными значениями его нормальной компоненты, которая является двумерной скалярной функцией. Поэтому можно ожидать, что все это разнообразие может быть получено с помощью распределений плотности тока, зависящих фактически также от двух измерений. В общем случае в качестве такого распределения удобно взять распределение поверхностных токов (токовую поверхность). Рассмотрим замкнутую токовую поверхность, разделяющую трехмерное пространство на две области – внутреннюю $V_i$ и внешнюю $V_e$. Магнитные поля во внутренней области, $B_i$, и внешней, $B_e$, являются гармоническими векторными полями, связанными у токовой поверхности граничными условиями

$$(4\pi/c)\bar{i} = \left[\bar{n}\cdot(\bar{B}_e - \bar{B}_i)\right], \qquad (1а)$$

$$B_{ne} = B_{ni}, \qquad (1б)$$

( $\bar{n}$ – нормаль, $\bar{i}$ – плотность поверхностного тока), в силу которых эти поля взаимно-однозначно связаны друг с другом и с плотностью тока. Таким образом, можно сформулировать задачу, имеющую единственное решение: найти распределение поверхностного тока на границе некоторой заданной области, создающее внутри этой области (гармоническое) магнитное поле заданной формы.

При математической формулировке этой задачи удобно воспользоваться описанием магнитного поля через скалярные потенциалы – внутренний $\psi_i$ и внешний $\psi_e$ ($\bar{B}$ = grad $\psi$) и исходить из представления заданного внутреннего потенциала в виде потенциала двойного слоя, расположенного на токовой поверхности $S$ с плотностью $\sigma(P)$:

$$\psi_i(P) = \int \sigma(Q)\,\frac{\cos(\bar{r}_{PQ}, \bar{n}_Q)}{r_{PQ}^2}\,dS_Q, \quad Q\in S, \quad P\in V_i. \qquad (2)$$

Пользуясь известными свойствами потенциала двойного слоя (1), можно показать, что во внешней области интеграл (2) является гармонической функцией $\psi_e$, связанной с $\psi_i$ условиями (1б). Тогда из (1а) следует, что плотность двойного слоя является в данном случае плотностью магнитного момента токовой поверхности, а плотность поверхностного тока выражается формулой

$$\bar{i}(P) = c\mathrm{Rot}\,\sigma(P),\ P \in S, \qquad (3)$$

имеющей простой смысл: линии тока, определяющие форму проводников на токовой поверхности, являются линиями $\sigma = \mathrm{const}$. Условие непрерывности линий тока при этом выполняется автоматически. Для нахождения плотности магнитного момента получим в общем случае двумерное интегральное уравнение

$$-2\pi\sigma(P) + \int\limits_S \frac{\cos(\bar{r}_{PQ},\bar{n}_Q)}{r_{PQ}^2}\,\sigma(Q)dS_Q = \psi_i(P);\ Q,P \in S, \qquad (4)$$

хорошо известное как уравнение внутренней задачи Дирихле[1], которое обычно используется для нахождения гармонической функции $\psi_i$ по ее краевым значениям. В данном случае эта функция считается заданной, и решение уравнения (4) дает плотность магнитного момента искомого распределения токов на токовой поверхности. Интеграл (2) с этой плотностью при $P \in V_e$ дает тогда потенциал внешнего магнитного поля.

Плотность магнитного момента, которая является двумерной скалярной функцией, служит удобным средством описания распределения вектора поверхностного тока, и через нее легко выразить все электрические характеристики системы. Например, полная энергия магнитного поля будет равна

$$W = -\frac{1}{2}\int\limits_S B_n\sigma dS. \qquad (5)$$

Во многих случаях, в частности для магнитных систем ускорителей, токовую поверхность можно взять в виде некоторой поверхности вращения (например, сфероида или тора). Тогда размерность уравнения (4) можно понизить. Разложим все величины в ряды Фурье по $\varphi$ ($\rho, \varphi, z$ – цилиндрические координаты)

$$\psi(\rho,\varphi,z) = \sum_{N=0,1,2}^{\infty} \psi_N(\rho,z)\cos N\varphi, \quad \sigma = \sum \sigma_N \cos N\varphi. \quad (6)$$

Для амплитуд $\sigma_N$ из уравнения (4) можно получить одномерные интегральные уравнения

$$\int_L \left[ 2\,\frac{(\rho-\bar\rho)n_{\bar\rho} + (z-\bar z)n_{\bar z}}{(\rho-\bar\rho)^2 + (z-\bar z)^2} F_N(v) - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho n_{\bar\rho}\left[2F_N(v) - F_{N-1}(v) - F_{N+1}(v)\right]}{v^2\left[(\rho+\bar\rho)^2 + (z-\bar z)^2\right]} \right] \sqrt{\bar\rho}\,\sigma_N(\bar\rho,\bar z)\,ds_L -$$

$$- 2\pi\sqrt{\rho}\,\sigma_N(\rho,z) = \psi_{N1}(\rho,z)\sqrt{\rho};\quad \rho,z \in L;\ \bar\rho,\bar z \in L, \quad (7)$$

где контур $L[\rho = \rho(s),\ z = z(s)]$ представляет сечение поверхности вращения плоскостью $\varphi = \mathrm{const}$. Входящие в уравнения (7) универсальные функции $F_N(v)$, зависящие от целого числа вариаций $N$ и одной переменной $v$

$$v = \left[\frac{(\rho-\bar\rho)^2 + (z-\bar z)^2}{(\rho+\bar\rho)^2 + (z-\bar z)^2}\right]^{1/2}, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad (8)$$

являются эллиптическими интегралами $N$-го порядка и могут быть выражены через гипергеометрический ряд

$$F_N(v) = \pi\,\frac{(2N+1)!!}{(2N)!!}\left(\frac{1-v^2}{4}\right)^{N+\frac{1}{2}}$$
$$F(N-1/2,\ N+1/2;\ 2N+1;\ 1-v^2). \quad (9)$$

Частный случай $N = 0$ соответствует азимутально-симметричному полю.

## Литература


1. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики, Наука, 1967 г.
2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трасцендентные функции, СМБ, Наука, 1965 г.
3. О. В. Тозони. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. Техника, Киев, 1967 г.