УДК 533.91

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В СЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. Г. Кирцхалия, А. А. Рухадзе

Рассмотрена задача тангенциального разрыва в сжимаемой проводящей жидкости, находящейся во внешнем магнитном поле. Путем анализа известного дисперсионного уравнения получено обобщенное условие устойчивости поверхности разрыва по отношению к малым возмущениям, из которого в пределе несжимаемости следует известное условие С. И. Сыроватского. Показано, что сколь угодно малая сжимаемость играет дестабилизирующую роль, сужая область устойчивости разрыва.

Устойчивость тангенциального разрыва в непроводящей жидкости как без учета, так и с учетом сжимаемости исследована достаточно подробно [1, 2]. В магнитной гидродинамике задачу устойчивости тангенциального разрыва в несжимаемом приближении впервые решил С. И. Сыроватский [3] (см. также [4]). Он получил условие устойчивости поверхности разрыва, которое при коллинеарности волнового вектора $\vec{\kappa}$, скачка скорости $\vec{V}$ и напряженностей магнитных полей по разные стороны поверхности $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ имеет вид

$$V^2 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{4\pi\rho_1\rho_2}(H_1^2 + H_2^2). \tag{1}$$

Для сжимаемой проводящей жидкости устойчивость тангенциального разрыва рассматривалась многими авторами, однако результаты, полученные ими, не только не переходят в условие (1), а наоборот, диаметрально противоречат ему. Наиболее типичными в этом отношении являются работы [5 – 8]. На это обстоятельство было указано в работе [9], в которой впервые была корректно сформулирована задача устойчивости тангенциального разрыва и показано, что он неустойчив к возмущениям, распространяющимся в виде поперечных волн Альфвеновского типа по обе стороны поверхности разрыва. В настоящей работе продолжен анализ, начатый в [9], и дан исчерпывающий ответ на поставленную проблему.

Дисперсионное уравнение, описывающее собственные колебания поверхности МГД тангенциального разрыва при $Z = 0$, имеет вид:

$$\frac{\rho_2 N_2}{\rho_1 N_1} + \frac{m_2}{m_1} = 0, \tag{2}$$

где

$$N_i = V_{Ai}^2 - (V_i - U_p)^2, \tag{3}$$

$$m_i^2 = \frac{[C_i^2 - (V_i - U_p)^2][V_{Ai}^2 - (V_i - U_p)^2]}{C_i^2 V_{Ai}^2 - (C_i^2 + V_{Ai}^2)(V_i - U_p)^2}, \tag{4}$$

где V_i – скорость течения, $V_{Ai} = H_{0i}/\sqrt{4\pi\rho_{0i}}$ – скорость Альфвена (индекс "0" означает равновесные значения); $C_i = \sqrt{\partial P_i/\partial\rho_i}$ – скорость звука; $U_p = \omega/\kappa$ – фазовая скорость возмущения, причем, $i = 1, 2$ относятся соответственно к областям $Z > 0$ и $Z < 0$.

Уравнение (2) получено из уравнений идеальной магнитной гидродинамики, когда векторы $\vec{\kappa}, \vec{V_i}$ и $\vec{H}_{0i}$ направлены вдоль оси X, а малые возмущения задаются в виде поверхностных волн, затухающих при $Z = \pm\infty$, т.е.

$$\begin{cases} f_1(xzt) \approx \exp(-km_1 z)\exp[i(kx - \omega t)] \\ f_2(xzt) \approx \exp(km_2 z)\exp[i(kx - \omega t)]. \end{cases} \tag{5}$$

Предполагается также, что сумма возмущенных газокинетических и магнитных давлений по обе стороны поверхности разрыва равны, т.е. скачок при $Z = 0$

$$\left\{P_i + \frac{H_i^2}{8\pi}\right\}_{Z=0} = 0, \tag{6}$$

где фигурные скобки означают скачок величины, давление P связано с плотностью ρ уравнением состояния. В несжимаемом пределе, когда $C_i \to \infty$, $m_1 = m_2 = 1$, уравнение (2) переходит в уравнение Сыроватского [3, 4].

Тангенциальный разрыв устойчив, если корни уравнения (2) являются реальными числами. Из (4) видно, что при реальных U_p величины m_i также реальные числа, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательность m_i^2 означает мнимость m_i, а это, как следует из (5), противоречит требованию поверхности возмущений. Таким образом, необходимо требовать положительность m_i^2, из чего следует действительность m. Обозначив $M_i = C_i^2 - (V_i - U_p)^2$ и $D_i =$

$C_i^2V_{Ai}^2 - (C_i^2 + V_{Ai}^2)(V_i - U_p)^2$, мы увидим, что неравенство $m_i^2 > 0$ равнозначно следующим трем системам неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} M_i > 0 \\ N_i > 0 \\ D_i > 0 \end{cases} \Rightarrow U_p \in \left] -\frac{C_iV_{Ai}}{\sqrt{C_i^2 + V_{Ai}^2}} + V_i;\ \frac{C_iV_{Ai}}{\sqrt{C_i^2 + V_{Ai}^2}} + V_i \right[\tag{7}$$

$$\text{б)} \begin{cases} M_i > 0 \\ N_i < 0 \\ D_i < 0 \end{cases} \Rightarrow U_p \in \left] -C_i + V_i;\ -V_{Ai} + V_i \right[\bigcup \left] V_{Ai} + V_i;\ C_i + V_i \right[\tag{8}$$

$$\text{в)} \begin{cases} M_i < 0 \\ N_i > 0 \\ D_i < 0 \end{cases} \Rightarrow U_p \in \left] -V_{Ai} + V_i;\ -C_i + V_i \right[\bigcup \left] C_i + V_i;\ V_{Ai} + V_i \right[\tag{9}$$

Фазовые скорости, заключенные в интервале (7), соответствуют поперечным МГД волнам Альфвеновского типа [10], и таким образом, реализация случая а), что возможно при любых соотношениях между характеристическими скоростями C и V_A, означает, что в среде распространяются именно эти волны. Интервалы (8) и (9) соответствуют продольным магнитозвуковым волнам, причем, случай б) реализуется, когда $C > V_A$ (малая сжимаемость), а случай в) – когда $C < V_A$ (большая сжимаемость).

Так как по условию задачи $m_i > 0\ (i = 1, 2)$, то уравнение (2) может иметь реальные корни лишь в том случае, когда N_i имеют разные знаки, что возможно, если по одну сторону поверхности разрыва реализуется случай а), а по другую – случай б), т.е. по одну сторону разрыва возмущения распространяются в виде поперечных волн Альфвеновского типа, а по другую – в виде магнитозвуковых волн. Таким образом, условие устойчивости тангенциального разрыва получается из требования пересечения интервалов (7) и (8), которое при $V_1 = V$ и $V_2 = 0$ имеет вид

$$V - \frac{C_1V_{A1}}{\sqrt{C_1^2 + V_{A1}^2}} < -V_{A2} \Rightarrow V < \frac{C_1V_{A1}}{\sqrt{C_1^2 + V_{A1}^2}} - V_{A2}. \tag{10}$$

В предположении $C_2 > V_{A2}$ выражение $\frac{C_2}{\sqrt{C_2^2 + V_{A2}^2}} \approx 1$, и окончательно симметризированное условие устойчивости МГД тангенциального разрыва можно записать в виде

$$V < \left| \frac{C_1V_{A1}}{\sqrt{C_1^2 + V_{A1}^2}} - \frac{C_2V_{A2}}{\sqrt{C_2^2 + V_{A2}^2}} \right|. \tag{11}$$

Легко показать, что из (11) следует условие Сыроватского (1) (смотри [9]). Кроме того, математические расчеты показывают, что сколь угодно малая сжимаемость ведет к дестабилизации разрыва, так как критическое значение квадрата скорости течения уменьшается на величину

$$\left(\sqrt{\frac{\rho_1 C_1^2 V_{A1}^2}{\rho_2(C_1^2+V_{A1}^2)}}+\sqrt{\frac{\rho_2 C_2^2 V_{A2}^2}{\rho_1(C_2^2+V_{A2}^2)}}\right)^2 \approx \left(\frac{H_1}{\sqrt{4\pi\rho_2}}+\frac{H_2}{\sqrt{4\pi\rho_1}}\right)^2.$$

Таким образом, нам удалось получить условие (11) устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемой проводящей жидкости, которое в пределе несжимаемости жидкости переходит в известное условие Сыроватского (1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика, М., Наука, 1986.

[2] Жвания И. А., Кирцхалия В. Г., Рухадзе А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 10, 35 (2003).

[3] Сыроватский С. И. ЖЭТФ, **23**, (1952).

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.

[5] Sen A. K. Phys. Fluids, **7**, 1293 (1964).

[6] Parker E. N. Astrophysics Journal, **139**, 699 (1964).

[7] Talvar S. P. J. Geophys. Res., **69**, 2702 (1964).

[8] Gervin R. A. Red. Mod. Phys., **40**, 652 (1968).

[9] Kirtskhalia V. G. Planet Space Sci., **42**, N 6, 513 (1994).

[10] Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика, М., Ф-М Литература, 1962.

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 26 ноября 2003 г.