Краткие сообщения по физике № 4 1974

О КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОМ РЕШЕНИИ ПЕРЕНОРМИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

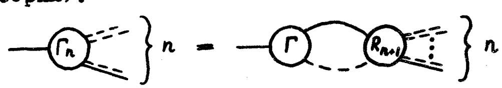
М. Я. Пальчик, Е. С. Фрадкин

УДК 530.145

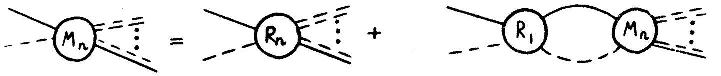
Найдено конформно-инвариантное решение перенормированных уравнений квантовой теории поля.

Рассматриваются некоторые общие ограничения на конформно-инвариантные функции Грина, вытекающие из точных перенормированных уравнений теории поля. Обычно высшие функции Грина представляются в виде разложений по скелетным графам, построенным из конформно-инвариантных вершин и пропагаторов /1,2/. При этом уравнения для собственной энергии и вершинной части оборачиваются условиями самосогласованности теории и служат для определения перенормированной константы связи и аномальной размерности фундаментальных полей. Не очевидно, однако, что возникающие здесь ряды в действительности определяют точное решение перенормированных уравнений (даже если оставить в стороне вопрос об их сходимости).

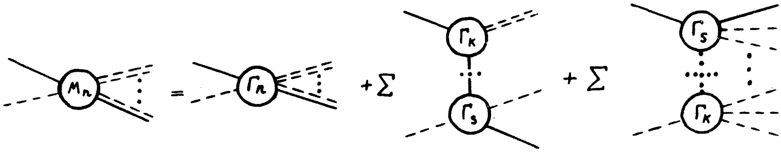
В данной работе сформулированы основные идеи другого подхода /3,4/ к построению конформно-инвариантной теории поля, основанного на анализе точных уравнений Швингера-Дайсона. Поскольку возникновение свойств конформной симметрии тесно связано с бесконечностью перенормировок, необходимо, чтобы все перенормировки были выполнены непосредственно в самих уравнениях. Такая программа для уравнений Швингера-Дайсона проведена в /5/. Полагая в полученных в /5/ уравнениях $z_1 = 0$, мы придем к системе бутстрапных уравнений, составляющих основу нашего подхода (для конкретности будет рассмотрена теория псевдоскалярного взаимодействия; все результаты легко обобщаются на любую конформно-инвариантную теорию):



(I)

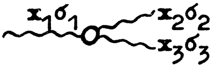


(2)

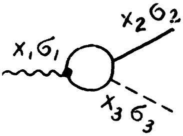


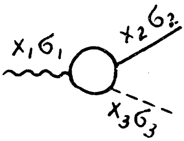
(3)

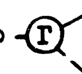
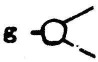
Пунктирные линии соответствуют мезонным концам (с размерностью δ), сплошные - нуклонные (с размерностью d), а знак Σ в (3) обозначает суммирование по всем возможным разбиениям пунктирных концов на группы $k_1,\ldots,k_s$ и симметризацию по ним. Вершина Γ_n получается из связной части полной функции Грина вычитанием всех графов, рассекаемых по одной линии. Система уравнений (I)-(3) должна быть дополнена рядом требований аксиоматического характера (спектральность, положительность, локальность и т.д.), а также определенными граничными условиями на массовой поверхности. Последние не требуются в конформно-инвариантной теории, где известен явный вид двух - и трехточечных функций. Анализ аксиоматических ограничений приведен в /3,4,6,7/. Здесь рассмотрено построение общего конформно-инвариантного решения системы (I)-(3).

Удобно использовать полный набор нормированных трехточечных вершин $C^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{x_1x_2x_3}$ =  , где $\sigma = (l, j_1, j_2)$, l - размерность, $j_{1,2}$ - квантовые числа группы Лоренца. Нормировочные условия обсуждаются в /3,4/ и выбираются так, чтобы теория была инвариантна относительно замены $\sigma \to \tilde{\sigma} \equiv (4-l, j_2, j_1)$, и чтобы величины $C^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{x_1x_2x_3}$ были ортонормированы. В частности

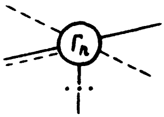
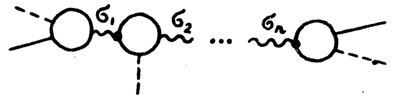
 $= \delta_{\sigma\sigma'} \cdot \delta(x - x')$, где введены обозначения

 $= C^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{x_1x_2x_3}$;

 $= C^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{x_1x_2x_3}$

В такой нормировке заряд g определяется согласно  $= g$ 

Мы будем пользоваться евклидовой формулировкой теории поля, что существенно фиксирует структуру конформных разложений /3/. Для Γ_n имеем

 $= \sum\limits_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$  (4)

где $\sum\limits_{\sigma} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} dl \sum\limits_{j_1 j_2} \mu_j(l)$, а $\rho_n(\sigma)$ – спектральные функции, определенные в комплексной плоскости размерностей l_i, $\mu_j(l)$ – известные функции (см. ниже).

Разложения /4/ вместе с аналогичными разложениями для M_n и R_n диагонализуют /8,3,4/ уравнения Швингера-Дайсона. Опуская промежуточные выкладки (см. /4/), приведем окончательный результат. <u>Все спектральные функции $\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$ имеют по каждой переменной простой полюс в точке $\sigma = \sigma_0$</u>, соответствующей квантовым числам спинорного поля (т.е. $l = d$, а числа $j_{1,2}$ принимают значения $(1/2,0)+(0,1/2)$, соответствующие спинорному полю $\Psi(x)$). Система уравнений (I)-(3), записанная в терминах спектральных функций $\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n)$, эквивалентна системе <u>линейных алгебраических соотношений между спектральными функциями и их вычетами в [illegible]</u>.

$$\rho_n(\sigma_1 \dots \sigma_n) = g\rho_0 \operatorname{res}\big|_{\sigma=\sigma_0} \rho_{n+1}(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n) =$$

$$= g\rho_0 \operatorname{res}\big|_{\sigma=\sigma_0} \rho_{n+1}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma) \qquad (5)$$

где $\rho_0^{-1} = \operatorname{res}\big|_{\sigma=\sigma_0} \rho_1(\sigma)$. Подчеркнем, что эти соотношения исчерпывают всю информацию о вершинах Γ_n, содержащуюся в уравнениях Швингера-Дайсона (I)-(3). При выводе (5) существенно, что уравнения (2), (3) являются определениями вершин R_n и M_n. Учет этих уравнений сводится к исключению R_n и M_n из системы. Подробный вывод (5) приведен в /4/.

Общее решение уравнений (5) имеет вид

$$\rho_n(\sigma_1\ldots\sigma_n) = g(g\rho_o)^{-n}\left[\prod_{i=1}\bar{\rho}_1(\sigma_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n-1}\bar{\rho}_2(\sigma_i\sigma_{i+1})\right]\cdots$$
$$\bar{\rho}_n(\sigma_1\ldots\sigma_n), \tag{6}$$

где $\bar{\rho}_k(\sigma_1\ldots\sigma_k)$, $(1\leqslant k\leqslant n)$ - произвольные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

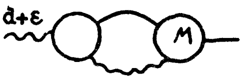
$$\mathrm{res}\big|_{\sigma=\sigma_o}\bar{\rho}_1(\sigma) = 1;$$
$$\bar{\rho}_k(\sigma_1\ldots\sigma_k)\big|_{\sigma_1=\sigma_o} = \bar{\rho}_k(\sigma_1\ldots\sigma_k)\big|_{\sigma_k=\sigma_o} = 1,\ k\geqslant 2. \tag{7}$$

Таким образом, для построения наиболее общих конформно-инвариантных вершин, удовлетворяющих системе уравнений (I)-(3), необходимо задать бесконечный набор функций

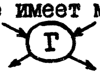
$$\bar{\rho}_1(\sigma_1),\ \bar{\rho}_2(\sigma_1\sigma_2),\ldots,\ \bar{\rho}_k(\sigma_1\ldots\sigma_k),\ldots,$$

подчиненных граничным условиям (7). Вершины Γ_n строятся из них по формулам (4), (6).

До сих пор не использовалось уравнение для собственной энергии (условие самосогласованности теории). В нашем подходе оно служит для определения константы ρ_o. Раскрывая неопределенность $o\times\infty$, имеющуюся в этом уравнении /9/, получим /3/

$$g^2\rho_o\lim\Big|_{\varepsilon\to o}\ \varepsilon$$  $$= (G^{-1})_\mu,$$

где индекс μ обозначает производную $\partial/\partial p\mu$.

Аналогичное уравнение имеет место для константы $\tilde{\rho}_o$, связанной с фермионной вершиной  . Вычисляя возникающие здесь интегралы, находим /3/

$$g^2\rho_o \stackrel{!}{=} 2\mu_{1/2},\quad g^2\tilde{\rho}_o = 2\mu_o$$

где μ_o и $\mu_{1/2}$ - весовые функции, фигурирующие в определении $\sum_\sigma$:

$$\mu_{1/2}(d) = \frac{1}{4}(4\pi)^6\,\frac{\Gamma(d+1/2)\Gamma(9/2-d)}{\Gamma(5/2-d)\Gamma(d-3/2)}$$

$$\mu_0(\delta) = \frac{1}{16}(4\pi)^6 \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(4-\delta)}{\Gamma(\delta-2)\Gamma(2-\delta)}$$

Оставшийся произвол в функциях $\bar{\rho}_k$ частично доопределяется аксиоматическими требованиями /3,4,6/. Однако и после их учета функции $\bar{\rho}_k$ еще не фиксируются однозначно /3/. Это не является неожиданным, поскольку в уравнениях (I-3) отсутствует затравочный член, что лишает систему значительной части первоначально содержащейся в ней информации. Поэтому дальнейшее построение конформноинвариантной теории поля требует эффективного учета затравочного члена. Он необходим, в частности, при построении различных локальных операторов типа тока, тензора энергии-импульса и т.д. Полное решение этого вопроса будет опубликовано в другой статье.

Поступила в редакцию
2I февраля I974 г.

Литература

1. A. A. Migdal. Phys. Lett., 37b, 386 (1971).
2. G. Mack, UI. T. Todorov. Phys. Rev. D5, 1764 (1973).
3. G. Mack. Group theoretical approach to conformal invariant quantum field theory, preprint, Universitat, Bern. 1973.
4. М. Я. Пальчик, Е. С. Фрадкин, Препринт № I5, Институт автоматики и электрометрии, I974 г., препринт ФИАН I974 г.
5. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 29, I2I, (I955), Труды ФИАН, 29, 20 (I965).
6. A. M. Polyakov. Preprint, Chernogolovka, 1973.
7. М. Я. Пальчик. Препринт № II, Институт автоматики и электрометрии, I974 г.
8. A. A. Migdal. Preprint, Chernogolovka, 1972.
9. G. Parisi. Lett. Nuovo Cim. 4, 15, 777 (1972).