

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ
РЕЗОНАНСЕ В СИНХРОТРОНЕЮ. А. Башмаков, К. Н. Шорин

УДК 621.384.63

Получены простые соотношения, описывающие явление затягивания на устойчивые возмущенные орбиты, возникающие при прохождении параметрического резонанса бетатронных колебаний в синхротроне. Основные результаты расчета сопоставлены и дали хорошее согласие с экспериментом в синхротроне ФИАН с максимальной энергией 680 Мэв.

Основные аспекты динамики частиц при имеющем большое значение в синхротроне параметрическом резонансе $\nu_x = 1/2$ радиальных бетатронных колебаний могут быть исследованы представлением возмущающей нелинейности в виде $Ax \cos \theta$, а наиболее сильных компонентов стабилизирующей нелинейности в виде $Dx^2 + Bx^3$.

Соответствующее дифференциальное уравнение, описывающее в первом приближении радиальные колебания частиц вблизи резонанса, можно при этом представить в виде

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{4} + \delta\right)x = Ax \cos \theta - Bx^3, \quad (1)$$

где x - радиальное отклонение частицы от равновесной орбиты, θ - азимутальный угол, δ - расстройка частоты радиальных колебаний относительно резонанса $\nu_x = 1/2$, $B = B_0 - (40/9)D^2$.

Решение уравнения (1), представленное в виде /1/

$$x = X \cos \frac{\theta}{2} + Y \sin \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

как легко видеть, связано с амплитудой a бетатронных колебаний соотношением

$$a_0 = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (3)$$

Учитывая (2), в первом приближении уравнение (1) может быть представлено и в канонической форме

$$\frac{dX}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad \frac{dY}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{\delta}{2} (x^2 + y^2) + \frac{A}{4} (y^2 - x^2) - \frac{3B}{16} (x^2 + y^2), \quad (4)$$

что позволяет исследовать динамику частиц на фазовой плоскости канонических переменных X, Y .

Из условия

$$\frac{dX}{d\theta} = \frac{dY}{d\theta} = 0$$

можно получить координаты особых точек на фазовой плоскости

$$X = Y = 0; \quad X = 0, \quad Y = \pm \sqrt{2(\delta + A)/3B};$$

$$X = \pm \sqrt{2(\delta - A)/3B}, \quad Y = 0.$$

При резонансе, т.е. если $\delta = 0$, уравнением границы области устойчивости сепаратриссы на фазовой плоскости X, Y является лемниската (рис. 1а)

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{4}{3} \frac{A}{B} (-x^2 + y^2) = 0,$$

а особые точки $X = Y = 0; X = 0, Y = \pm \sqrt{2A/3B}; X = \pm \sqrt{2A/3B}, Y = 0$; являются фиксированными точками, для которых частота колебаний является точно резонансной.

На рис. 1а видно также, что точка $X = Y = 0$ является неустойчивой (типа седло), а две другие (типа центр) устойчивы.

Общий случай $\delta \neq 0$ при $H = const$ можно рассмотреть, представив уравнение (4) для гамильтониана H в виде

$$f_1 f_2 = \varepsilon, \quad (5)$$

где

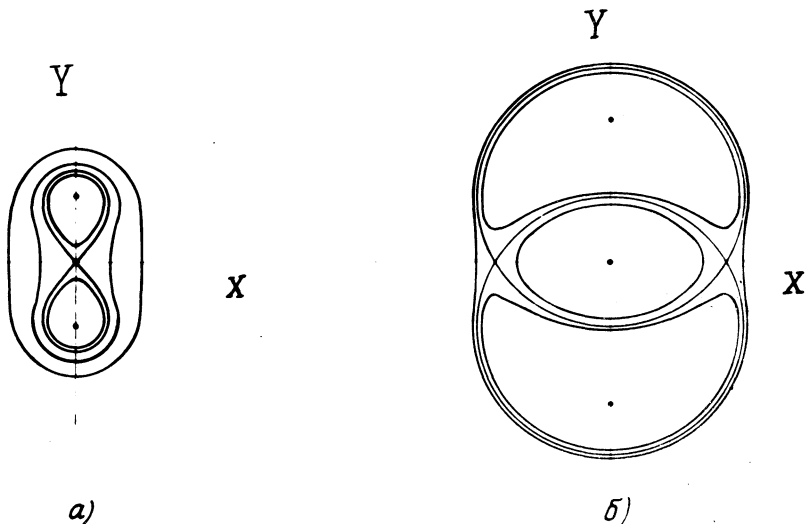
$$f_1 = (Y - C)^2 + X^2 - R^2,$$

$$f_2 = (Y + C)^2 + X^2 - R^2,$$

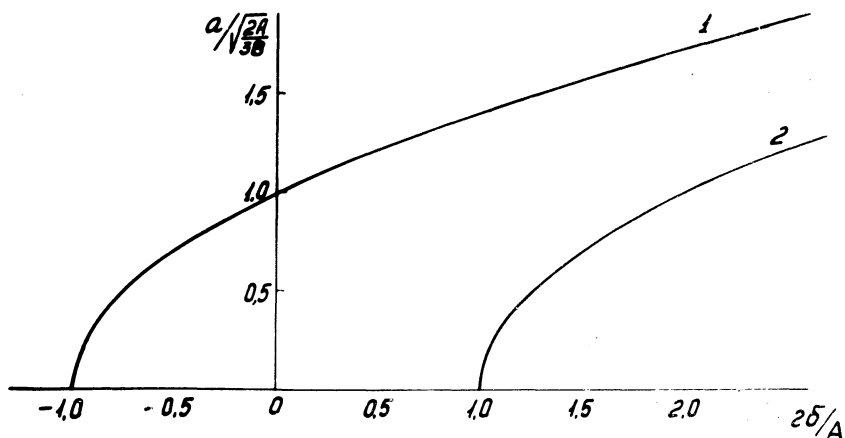
$$R = \sqrt{4\delta/3B}, \quad C = \sqrt{2A/3B}, \quad \varepsilon = - (16/3B)H - R^4 - C^4.$$

Если

$$\delta/B > 0, \quad A/B > 0, \quad \varepsilon = 0, \quad (6)$$



Р и с. 1. Фазовые траектории вблизи параметрического резонанса:
 а) при $\delta = 0$, б) при $\delta > A/2$



Р и с. 2. Расчетная зависимость положения особых точек от расстройки: 1 - устойчивые особые точки, 2 - неустойчивые особые точки

уравнение (5) описывает сепаратриссу, определяемую двумя пересекающимися (рис. 1б) окружностями $r_1 = r_2 = 0$ равных радиусов R , центры которых смещены вдоль оси y на $\pm c$ и при условии

$$2\delta > A \quad (7)$$

имеют общие (неустойчивые) точки с координатами

$$x = \pm \sqrt{2(2\delta - A)/3B}, \quad y = 0. \quad (8)$$

Фиксированные же особые точки фазовой плоскости с координатами

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{2(2\delta + A)/3B} \quad (9)$$

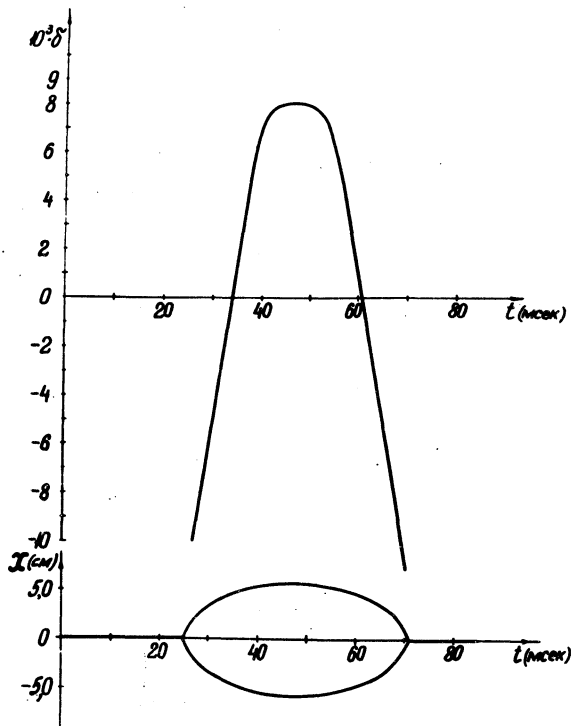
являются устойчивыми (типа центр).

При медленном прохождении в условиях (6), (7) резонанса изменение δ приводит, как показано на рис. 2, к изменению согласно (8) и (9) амплитуд a частиц, движущихся в устойчивых (кривая 1) и неустойчивых (кривая 2) особых точках.

В то же время кривую 1 можно трактовать как описание динамики образовавшихся в результате затягивания в резонанс новых устойчивых орбит, а кривую 2 — как границу устойчивости колебаний относительно орбит, описываемых кривой 1.

Кривую 1 в синхротроне можно наблюдать экспериментально, используя оптическую область синхротронного излучения ускоряемого пучка. Если наблюдение за пучком ведется с азимута $\theta = \pi$ равновесной орбиты, то распределение частиц по отклонениям от равновесной орбиты определяется непосредственно кривой 1 рисунка 2, а при наблюдении с других азимутов ординаты кривой 1 следует умножить на $\sin(\theta/2)$. На всех азимутах, кроме $\theta = 0$ в результате затягивания в резонанс пучок должен иметь в сечении два ядра, симметрично смещенных в обе стороны от равновесной орбиты. Описанное явление наблюдалось в экспериментах по исследованию резонансов бетатронных колебаний в синхротроне ФИАН с максимальной энергией 680 МэВ. На нижней кривой рис. 3 приведена зависимость от времени отклонений x центра пучка от равновесной орбиты в опыте, где величина δ изменялась в соответствии с верхней кривой рис. 3. Здесь величина θ составляла $\sim \pi$ и, следовательно, $|x| \approx a$. Величины x для рис. 3 получены фотометрической обработкой кинограмм сечения пучка при резонансе, а величины δ были определены по результатам измерения частот бетатронных коле-

баний путем их резонансной раскочки полем высокой частоты /2/ в разных фазах процесса /3/.



Р и с. 3. Временная зависимость положений центра пучка (нижняя кривая) в синхротроне на 680 Мэв при изменении расстройки δ (верхняя кривая)

На основании данных, приведенных на рис. 3, были вычислены величины А и В с помощью соотношений

$$A = \frac{2(\delta_2 - \delta_1 q)}{q - 1}, \quad B = \frac{4(\delta_2 - \delta_1)}{3(a_2^2 - a_1^2)}, \quad q = \frac{a_2^2}{a_1^2}, \quad (10)$$

где $\delta_{1,2}$ и $a_{1,2}$ — соответствующие пары значений расстройки и отклонений $|x| = a$ центра сгустка частиц от равновесной орбиты.

Соответствующие величины А и В, вычисленные по (10), оказались равными: $A = 2 \cdot 10^{-2}$, $B = 9,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2}$. Эти же величины были независимо вычислены на основании данных о магнитном поле синхротрона. Соответствующие "магнитные" величины А и В были получены из экспериментальных кривых $n(x)$ зависимости показателя поля n от радиуса /4/ путем представления этой зависимости в виде

$$n(x) = n_0 + n_1 x + \frac{n_2}{2} x^2 + \frac{n_3}{3!} x^3 + \dots$$

В этом случае

$$B_0 = (1 + \lambda)^2 \left[-\frac{n_2}{2} - \frac{3}{4R_0^2} n_0(n_0 + 1) + \frac{n_1}{2R_0} \left(1 + \frac{3}{2} n_0\right) - \frac{n_0}{2R_0^2} \right],$$

$$D = (1 + \lambda)^2 \left[-\frac{n_1}{2} + \frac{n_0}{2R_0} (1 + n_0) \right], \quad (\text{II})$$

$$B = B_0 - \frac{40}{9} D^2, \quad A = (1 + \lambda)^2 n_{10}.$$

Здесь λ - известный /3/ параметр рейстрака, определяемый отношением длины прямолинейных участков равновесной орбиты к круговым, R_0 - радиус равновесной орбиты, n_{10} - первая гармоника азимутальной зависимости показателя поля n .

В синхротроне на 680 Мэв величины А и В, вычисленные в соответствии с только что описанной процедурой по соотношениям (II), оказались в полном согласии с экспериментом по ускоряемому пучку, равными $A = 0,02$, $B = 0,001 \text{ см}^{-2}$.

Таким образом, описанные в данной работе достаточно простые расчет и эксперимент позволяют надежно контролировать по ускоряемому пучку основные характеристики, определяющие важнейшие проявления параметрического резонанса.

Поступила в редакцию
14 января 1974 г.

Л и т е р а т у р а

1. Ю. А. Башмаков, К. А. Беловинцев. Краткие сообщения по физике ФИАН, № I. 18 (1972).
2. S. L. Hammer, R. W. Pidd, K. M. Terwilliger. Rev. Sci.Instr., 26, 555 (1955).
3. S. L. Artemjeva et. al. Nucl. Instr. and Meth., 52, 325(1967).
4. Г. М. Бозин и др. "Ускоритель электронов на 680 Мэв" (сборник статей). Госатомиздат. 1962 г.. стр. 5.