Краткие сообщения по физике № 6 1974

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТИХОНОВА В ОТСУТСТВИИ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ

Е. К. Паламарчук, Д. С. Чернавский

УДК 534.01

Показана возможность применения теоремы о решении систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при старших производных, в случае, когда устойчивое стационарное состояние системы дифференциальных уравнений расположено на бесконечности.

Теорема Тихонова /1/ является строгим математическим обоснованием метода стационарных концентраций. Этот метод позволяет сокращать число дифференциальных уравнений в системе, описывающей процессы с существенно различными характерными временами. Упрощение системы осуществляется путем замены части дифференциальных уравнений (быстрые процессы) алгебраическими, связывающими стационарные значения. Совокупность алгебраических уравнений называют присоединенной системой, а систему, полученную в результате упрощения исходной полной системы - вырожденной.

Теорема Тихонова доказана для случая, когда полная система дифференциальных уравнений, равно как и присоединенная, и вырожденная имеют стационарное состояние, расположенное в бесконечной области фазового пространства. При моделировании биологических процессов, однако, часто встречаются случаи, в которых стационарное состояние отсутствует, точнее, расположено на бесконечности. В настоящей заметке мы рассмотрим, каким образом в этих условиях может быть сформулирован и применен метод стационарных концентраций. Рассмотрение проведем в простейшем случае системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (результаты могут быть обобщены на случай многих переменных).

Пусть имеется система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} P(x,y), \quad x\big|_{t=t_0} = a,$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu} Q(x,y), \quad y\big|_{t=t_0} = b, \tag{I}$$

где x и y-безразмерные переменные. Функции P и Q также безразмерны, а размерные множители, отражающие масштабы времени развития первого и второго процессов, обозначены ε и μ, причем, параметры ε и μ положительны и одного порядка.

Рассмотрим случай, когда решение системы (I) $x(t)$, $y(t)$ таково, что при $t \to \infty$, $x(t) \to \infty$, $y(t) \to y_0$, где $y_0 = \text{const}$. Будем считать также, что бесконечно удаленное стационарное состояние устойчиво. Тогда, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ ограничены и дифференцируемы во всей области изменения переменных x, y и для всех точек подпространства $Q(x,y) = 0$ выполняется неравенство

$$Q'_y(x,y) < 0, \tag{2}$$

то при указанных условиях можно сформулировать следующее утверждение. При достаточно больших значениях времени t полная система (I) может быть сведена к вырожденной системе (уравнению):

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} P\left[x_1, y_1(x_1)\right], \quad x_1\big|_{t=t_0} = a, \tag{3}$$

где стационарное значение $y_1(x_1)$ находится из условия:

$$Q(x_1, y_1) = 0. \tag{4}$$

Именно, утверждается, что решения системы (3)-(4), $x_1(t)$, $y_1(t)$, близки к решениям исходной системы (I), $x(t)$, $y(t)$, при $t \gg (|\lambda|)^{-1}$, где λ - максимальный из отрицательных корней характеристического уравнения системы

$$|x(t) - x_1(t)| \leqslant (t|\lambda|)^{-1},$$
$$|y(t) - y_1(t)| \leqslant (t|\lambda|)^{-1}. \tag{5}$$

Для доказательства этого утверждения введем новые переменные $\xi(t) = x(t) - x_1(t)$, $\eta(t) = y(t) - y_1(t)$. Тогда для них имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\left[P(x,y) - P(x_1,y_1)\right],$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{\mu}Q(x,y) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{dy_1}{dx_1}P(x_1,y_1). \tag{6}$$

Покажем, что система (6) имеет особую точку $\xi = 0$, $\bar{\eta} = 0$, причем эта особая точка является устойчивой.

Координаты особой точки системы (6) находятся из условия $d\xi/dt = d\bar{\eta}/dt = 0$, откуда $x(t) = x_1(t) + C_1$, $y(t) = y_1(t) + C_2$, где константы C_1 и C_2 определяются следующим образом. Константа C_1 равна нулю в силу совпадения начальных условий для $x(t)$ в системе (I) и для $x_1(t)$ в системе (3). Отсюда $P(x_1,y) = P(x_1,y_1)$, т.е. $P\left[x_1,(y_1 + C_2)\right] = P\left[x_1,y_1\right]$. Следовательно, константа C_2 также равна нулю, и координаты особой точки системы (6) – $\xi = 0$, $\bar{\eta} = 0$.

Используя стандартные методы определения характера устойчивости особых точек /2–3/, легко показать, что особая точка $\xi = 0$, $\bar{\eta} = 0$ устойчива, если бесконечно удалённое стационарное состояние системы (I) устойчиво. Последнее требование выполняется по условию задачи, следовательно, состояние $\xi = 0$, $\bar{\eta} = 0$ устойчиво.

По условию (2) все траектории "быстрых" движений стремятся, по прошествии некоторого малого инрервала времени Δt, в подпространство $Q(x,y) = 0$, причем $\Delta t \to 0$ при $\mu \to 0$. Далее можно считать $\xi = \bar{\xi} + e^{-|\lambda| t}$, $\eta = \bar{\eta} + e^{-|\lambda| t}$, где λ – максимальныи из отрицательных корней характеристического уравнения системы (I). Следовательно, при $t \gg (|\lambda|)^{-1}$ выполняются неравенства (5). Таким образом, показана возможность применения теоремы Тихонова в отсутствии стационарного состояния.

Подчеркнем, что сделанное утверждение справедливо и в том случае, когда ε и μ одного порядка. Проводя аналогию с теоремой Тихонова, необходимо отметить, что уравнения, описывающие неограниченный рост, можно всегда считать при больших временах более медленными по сравнению с подсистемой, описывающей процессы в конечном подпространстве.

Применение теоремы Тихонова в отсутствии стационарного состояния весьма важно для решения многих задач. Например, в ферментативной кинетике нестационарных процессов, когда одна из концентраций растет до бесконечности, в микробиологических и экологических задачах, когда полная биомасса неограниченно возрастает, и в целом ряде других случаев.

В заключение авторы выражают свою глубокую признательность Н. В. Степановой за плодотворное обсуждение работы.

Поступила в редакцию
13 марта 1974 г.

Литература

1. А. Н. Тихонов. Математический сборник, 31, 575 (1952).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959 г.
3. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М.-Л., Гостехиздат, 1950 г.