Краткие сообщения по физике № 12 1974

О СТАТИСТИКЕ ИНТЕРВАЛОВ В ПРОСТОЙ МУЛЬТИПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

М. И. Адамович, С. П. Харламов

УДК 539.171.017

Из равномерной плотности распределения частиц по быстроте, следующей из простой мультипериферической модели, получены плотности распределения интервалов, занимаемых группой (k − 1) частиц, а также функция распределения событий множественности n, когда ровно m интервалов из (n − k) интервалов меньше заданной величины.

При неупругом взаимодействии адронов высокой энергии образующиеся частицы вылетают преимущественно в направлении первичной налетающей частицы. Поперечные компоненты их импульсов $p_\perp$ ограничены очень малыми значениями ($p_\perp \sim 300$ Мэв/с). Это означает, что взаимодействие между адронами происходит при сравнительно больших прицельных параметрах. Механизмом такого неупругого взаимодействия адронов является мультипериферическая генерация частиц, простейшая модель которой была предложена и исследована Амати, Фубини, Стангеллини /1/.

В силу ограниченности поперечных импульсов фазовый объем, занимаемый частицами, сводится к одномерному объему, зависящему от одной только переменной. Такой удобной переменной является быстрота

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_\parallel}{E - p_\parallel}, \tag{1}$$

где E и $p_\parallel$ – энергия и продольный импульс частицы.

При мультипериферическом механизме плотность образующихся частиц $\rho = dN/dy$ в пространстве быстрот постоянна $\rho(y) = \rho_0$ в физической области $0 \leqslant y \leqslant Y$ и не зависит также от быстроты $Y = \ln(E_0/\mu)$ налетающей частицы. С физической точки зрения мультипериферическая генерация отвечает процессу независимого образования частиц, при котором отсутствуют корреляции между частицами по быстроте. Поэтому изучение распределений быстрот и быстротных интервалов, занимаемых группой частиц, имеет существенный интерес для проверки коррелированности частиц.

Таким образом, задача сводится к сравнению распределений быстрот и интервалов быстрот частиц с распределениями, получаемыми при случайном разбиении отрезка $(0,Y)$ n точками. Удобнее рассматривать относительные быстроты y/Y и пользоваться единичным отрезком $(0,1)$, на котором расположено n точек. В дальнейшем для простоты относительные быстроты мы будем обозначать y.

Предположим, что на отрезке $(0,1)$ случайно и независимо друг от друга распределены n точек. Плотность распределения точек на интервале $(0,1)$ равна n. В этих предположениях получим несколько распределений.

1. Пронумеруем координаты y_k каждой точки по порядку возрастания y. Упорядоченный набор координат будем называть событием множественности n.

Плотность распределения упорядоченных координат y_k имеет следующий вид /2/:

$$f(y_k) = nC_{n-1}^{k-1} y_k^{k-1}(1 - y_k)^{n-k}, \tag{2}$$

где C_{n-1}^{k-1} – число сочетаний из $(n - 1)$ элементов по $(k - 1)$ элементов.

2. Рассмотрим вероятность двум частицам находиться на расстоянии Δ друг от друга в событии с множественностью $n = 2$. Очевидно, что вероятность попасть точке в интервал от y до $y + dy$ равна dy. Вероятность точке иметь координату меньше y равна y, то есть, функция распределения $F(y) = y$. Из геометрических соображений следует /3/, что вероятность двум частицам иметь координаты, отличающиеся на величину Δ, равна

$$dw = (1 - \Delta)d\Delta. \tag{3}$$

3. Применим полученную формулу для получения плотности распределения интервалов, содержащих внутри себя $(k-1)$ частиц. Пусть задано событие множественности n, то есть, на отрезке $(0,1)$ имеется множество из n точек, причем $(k+1)$ точек попадают между координатами y_i и y_{i+k}, разделенными интервалом Δ_{kn}, а остальные $(n-k-1)$ точек расположены вне интервала Δ_{kn}. Вследствие этого плотность вероятности появления интервала Δ_{kn},

содержащего внутри себя (k-I) частиц, равна согласно пункту 2 произведению (3) на Δ_{kn}^{k-1} и на $(1 - \Delta_{kn})^{n-k-1}$. Таким образом, получаем

$$\frac{dw}{d\Delta_{kn}} = nC_{n-1}^{k-1}\Delta_{kn}^{k-1}(1 - \Delta_{kn})^{n-k}. \qquad (4)$$

Как мы видели, плотность распределения k-той координаты и плотность распределения интервалов, содержащих (k-I) частиц, в событиях с множественностью n описываются одним и тем же законом

$$f(x) = nC_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1 - x)^{n-k}. \qquad (5)$$

Отсюда для интегральной функции распределения будем иметь

$$F(t) = \mathcal{P}(x_k < t) = nC_{n-1}^{k-1}\int_0^t x^{k-1}(1 - x)^{n-k}dx \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant I. \qquad (6)$$

Распределение $\mathcal{P}(x_k < t)$ принадлежит к типу бета-распределений, задаваемых функцией вида

$$\begin{aligned} I_t(a,b) &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^t x^{a-1}(1 - x)^{b-1}dx && \text{при } 0 \leqslant x \leqslant I \\ I_t(a,b) &= 0 && \text{при } x \leqslant 0 \\ I_t(a,b) &= 1 && \text{при } x \geqslant I. \end{aligned} \qquad (7)$$

Для матиматического ожидания и дисперсии имеем

$$\begin{aligned} Mx &= \langle x \rangle = \frac{a}{a + b}, \\ \sigma_x^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{ab}{(a + b)^2(a + b + 1)}. \end{aligned} \qquad (8)$$

4. Рассмотрим, какова функция распределения (и плотность распределения) минимального (или максимального) интервала, если плотность распределения интервалов задана законом $f(x)$. Эта задача тесно связана, а вернее, является частным случаем задачи: Какова функция распределения (или плотность) событий, когда ровно m интервалов из $(n - k)$ интервалов меньше величины t. Вероятность того, что интервал будет меньше t, равна

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx. \tag{9}$$

Вследствие этого функция распределения или вероятность событий, в которых m интервалов из $(n - k)$ интервалов будут меньше t, а остальные – больше, равна

$$\mathcal{P}(m \text{ интервалов} < t) = C^m_{n-k}[F(t)]^m[1 - F(t)]^{n-k-m}, \tag{I0}$$

где $F(t)$ определяется формулами (5) и (9). Плотность вероятности в этом случае записывается в виде

$$g(m \text{ интервалов} = t) = C^m_{n-k} f(t)[F(t)]^{m-1} [1 - F(t)]^{n-k-m-1} \times$$
$$\times [m - (n - k)F(t)]. \tag{II}$$

В одном предельном случае, когда $m = 0$, в событии нет ни одного интервала, превышающего значение t. Это означает, что в этом случае формула (I0) является функцией распределения минимального интервала, превышающего величину t,

$$\mathcal{P}(\Delta_{knmin} > t) = [1 - F(t)]^{n-k}. \tag{I2}$$

В частном случае $k = I$ формула (I2) описывает распределение минимальной щели между быстротами частиц

$$\mathcal{P}(\Delta_{min} > t) = \left[(1 - t)^n\right]^{n-1}. \tag{I3}$$

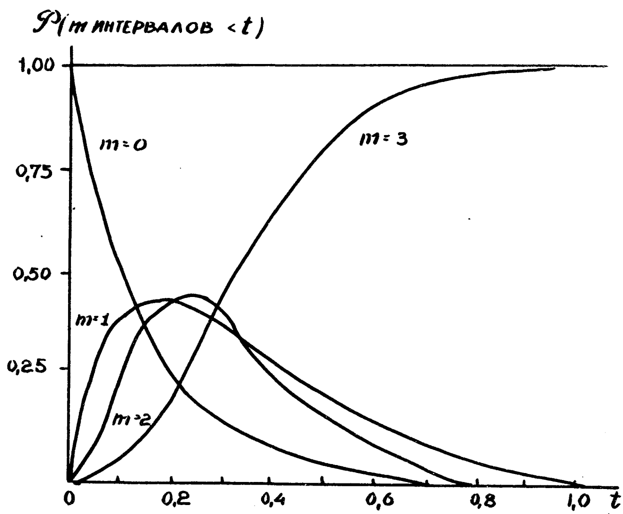
В другом предельном случае $m = n - k$ все интервалы меньше t и, следовательно, распределение максимального интервала имеет вид

$$\mathcal{P}(\Delta_{knmax} < t) = [F(t)]^{n-k}. \tag{I4}$$

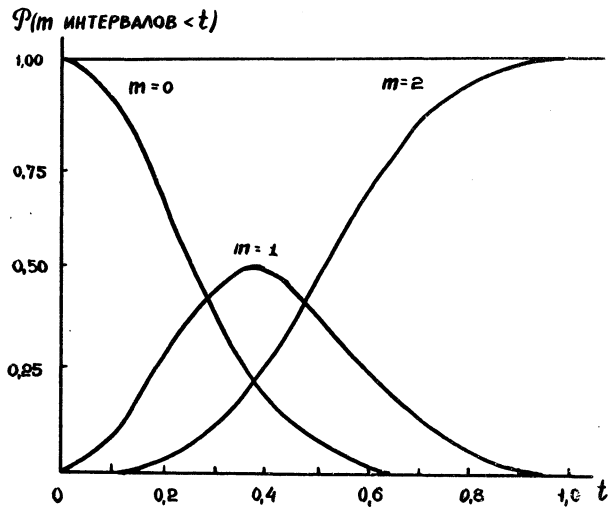
В частном случае $k = I$ формула (I4) описывает функцию распределения максимальной щели между частицами:

$$\mathcal{P}(\Delta_{max} < t) = \left[1 - (1 - t)^n\right]^{n-1}. \tag{I5}$$

На рис.I. представлены функции распределения (I0)' событий множественности $n = 4$ для $k = I$ и $m = 0, 1, 2, 3$. На рис. 2. представлены функции распределения (I0) событий той же множест-



Р и с. I. Функции распределения событий множественности $n = 4$, когда ровно m интервалов Δ_{1n} между соседними быстротами частиц меньше заданной величины



Р и с. 2. Функции распределения событий множественности $n = 4$, когда ровно m интервалов Δ_{2n}, содержащих три частицы, меньше заданной величины венности, но для $k = 2$ и $m = 0, 1, 2$. Эти функции и аналогичные им для других множественностей удобно сравнивать с экспериментальными распределениями и делать заключения о справедливости предположений, лежащих в основе вывода (10). В частности, с помощью функций (10) можно решать вопросы о корреляции частиц по быстроте.

Поступила в редакцию
10 июня 1974 г.

Литература

1. D. Amati, S. Fubini, A. Stanghellini. Nuovo Cimento 26, 896 (1962).
2. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Москва, ГИТТЛ, 1955 г.
3. Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. Теория вероятностей. Москва, "Наука", 1973 г.