УДК 530.145.1

О ТОЧНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКЕ ДЕЙСТВИЯ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

А. Матыцин

Вычислено перенормированное действие Лиувилля и найден квантовый тензор энергии-импульса. Показано, что рассмотрение теории Лиувилля как конформной теории корректно.

Среди двумерных теорий поля особый интерес представляют теории, инвариантные лтносительно группы конформных преобразований - из этой инвариантности могут быть выяснены лногие свойства таких теорий /1/. Возникает вопрос о лагранжевой формулировке конформных георий. Среди них интересной является теория Лиувилля с действием /2/

$$S = \int d^2\sigma\sqrt{g}\ [(1/2)\,\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi + a\exp(ib\varphi)]. \tag{1}$$

Она возникает, например, в связи с двумерной гравитацией /3/. Для проверки гипотезы о конформности теории Лиувилля важно найти бесследовый тензор энергии-импульса, являющийся генератором конформных преобразований.

В данной работе квантовый тензор энергии-импульса вычислен двумя различными методами. Совпадение результатов подтверждает гипотезу о конформности теории.

Рассмотрим теорию Лиувилля в евклидовом пространстве. Упростим действие (1), используя тот факт, что любая двумерная метрика - конформно-плоская:

$$ds^2 = \exp[\rho(\sigma)]\,[(d\sigma^1)^2 + (d\sigma^2)^2]. \tag{2}$$

Тогда, вводя новое поле $\phi = \varphi + \rho/ib$, получим

$$S = \int d^2\sigma\ [(1/2)\,\partial_\alpha\phi\partial_\alpha\phi + c\phi\partial_\alpha\partial_\alpha\rho + a\exp(ib\phi)] + \tilde{S},$$

где $\tilde{S}$ не зависит от ϕ, $c = 1/ib$. В метрике (2) скалярная кривизна равна

$$R = -\exp(-\rho)\,\partial_\mu \partial_\mu \rho, \tag{3}$$

и поэтому

$$S = \int d^2\sigma\ [(1/2)\ \partial_\alpha \phi \partial_\alpha \phi + a \exp(ib\phi) - c\phi R\sqrt{g}]. \tag{4}$$

Проведем явное вычисление перенормированного действия, которое даст точную формулу для квантового тензора энергии-импульса.

1. Найдем эффективный лагранжиан для действия (4). Покажем, что расходящиеся члены в эффективном лагранжиане приводят к изменению коэффициента a, зависящему от координат. Хотя значение a в (4) не имеет физического смысла (его изменение эквивалентно сдвигу ϕ на константу), изменение a, зависящее от координат, приводит к новому выражению для c.

Рассмотрим произвольную диаграмму, отвечающую некоторой одночастично-неприводимой функции Грина. В двух измерениях расходятся только петлевые интегралы, связанные с "головастиками" (рис. 1): $\int^\Lambda d^2q/q^2 \propto \ln \Lambda$. Этот факт характерен только для двумерной теории. Из вершины (рис. 2) могут "расти" 0, 1, ..., s "головастиков". В ту же функцию Грина дают вклад и все диаграммы, отличающиеся от рис. 2 числом s. Поэтому можно вычислить сумму по s и ввести новую вершину с k "хвостами" (рис. 3).

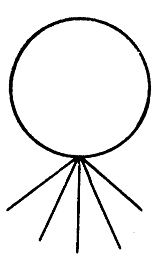

Рис 1. *В двух измерениях расходятся только головастики.*

Рис 2. *Типичная диаграмма дающая вклад в одночастично неприводимую функцию ГринаЛ для нее — Н В.*

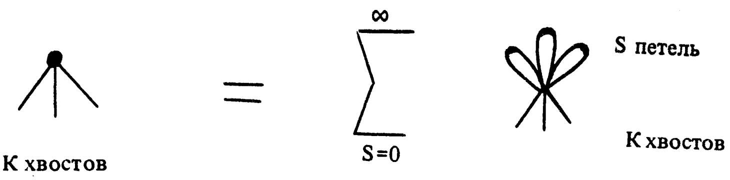

Рис.3. Учет всех расходящихся вкладов в эффективное действие сводится к суммированию "головастиков".

Чтобы учесть "головастики" в эффективном действии, достаточно заменить все вершины новыми, введенными по рис. 3. Соответствующие вклады имеют вид $A_k\phi^k$, причем

$$k!A_k = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(2s+k)!}{2^s s!}\right]\left[a\frac{(ib)^{2s+k}}{(2s+k)!}\right] \langle \phi(x)\phi(x)\rangle^s. \tag{5}$$

Откуда $A_k = a\,(ib)^k \exp[-(b^2/2)\langle \phi(x)\phi(x)\rangle]/k!$. Окончательно вклад в эффективный лагранжиан равен

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k\phi^k = a\exp(-Ib^2/2)\exp(ib\phi), \tag{6}$$

где $I = \langle \phi(x)\phi(x)\rangle$.

Отсюда видно, что единственное отличие эффективного действия от классического состоит в замене коэффициента a на $A = a\exp(-Ib^2/2)$. Расходящийся параметр I в формуле (6) можно включить в поле ϕ, введя новое (перенормированное) поле $\Phi = \phi + iIb/2$. Тогда эффективное действие принимает вид:

$$S_{ef} = \int d^2\sigma\,[(1/2)\partial_\alpha\Phi\partial_\alpha\Phi + a\exp(ib\Phi) - (1/ib)\Phi R\sqrt{g} + (ib/2)\Phi\partial_\alpha\partial_\alpha I], \tag{7}$$

где отброшены члены, не зависящие от Φ.

Регуляризуем I. Поскольку $\partial_\mu\partial_\mu \langle \phi(x)\phi(y)\rangle = -\delta^{(2)}(x-y)$, то $\langle \phi(x)\phi(y)\rangle = -(1/4\pi)\ln[(x^\mu - y^\mu)(x^\mu - y^\mu)]$. Для регуляризации наложим ковариантное условие $\sigma = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) =$

onst, откуда $(x^\mu - y^\mu)(x^\mu - y^\mu) = \sigma e^{-\rho}$ и $I = (1/4\pi)\rho - (1/4\pi)\ln\sigma$. Подставив это выражение в (7) и учтя (3), найдем

$$S_{ef} = \int d^2\sigma \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\Phi\partial_\alpha\Phi + a\exp(ib\Phi) - \left(\frac{1}{ib} + \frac{ib}{8\pi}\right)\Phi R\sqrt{g}\right]. \qquad (8)$$

Таким образом, вместо $1/b$ в эффективном действии возникает множитель $1/b - b/8\pi$.

Для дальнейшего перепишем результат в форме, отвечающей действию с другой нормировкой поля. Если $S = \int d^2\sigma\sqrt{g}\,[(1/8\pi)\partial_\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi + ae^{ib\varphi}]$, то $S_{ef} = \int d^2\sigma\,[(1/8\pi)\partial_\alpha\Phi\partial_\alpha\Phi + ae^{ib\Phi} - (1/b - b/2)\Phi R\sqrt{g}/4\pi i]$.

2. Рассмотрим теорию Лиувилля как конформную теорию. Найдем для нее тензор энергии-импульса, являющийся генератором конформных преобразований. Запишем действие (4) с помощью переменных z, $\bar{z}$:

$$S = \int i dz\wedge d\bar{z}\left(\frac{1}{4\pi}\partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi + \frac{a}{2}e^{ib\phi} + \frac{c}{2\pi}\phi\partial_z\partial_{\bar{z}}\rho\right). \qquad (9)$$

Используя его инвариантность при конформных преобразованиях, по теореме Нетер получаем сохраняющийся тензор энергии-импульса (для случая плоской метрики, $\rho = 0$):

$$T_{zz} = -(1/2)(\partial_z\phi)^2 + c\partial_z^2\phi,\ T_{\bar{z}\bar{z}} = -(1/2)(\partial_{\bar{z}}\phi)^2 + c\partial_{\bar{z}}^2\phi,$$

а $T_{z\bar{z}}$ в силу уравнений поля обращается в нуль. В классическом случае $c = 1/ib$ и $\partial_{\bar{z}}T_{zz} = 0$ в силу уравнения поля $\partial_z\partial_{\bar{z}}\phi = i\pi ab\exp(ib\phi)$. В квантовом случае T_{zz} получается варьированием эффективного действия и содержит $c = 1/ib + \delta c$. Оказывается, что δc можно найти, требуя самосогласованности конформной теории. Чтобы лагранжиан в (9) можно было корректно интегрировать по поверхности, необходимо, чтобы $\exp(ib\phi)$ было примарным полем с размерностями $\Delta = \bar{\Delta} = 1$. На языке операторного разложения это означает:

$$T_{zz}(z)\exp[ib\phi(w,\bar{w})] = \exp[ib\phi(w,\bar{w})]/(z-w)^2 + \ldots,\ z \to w.$$

Вместе с тем, пользуясь теоремой Вика и корреляторами

$$\langle \phi(z,\bar z)\phi(w,\bar w)\rangle = -\ln|z-w|^2,$$

получаем для тензора T выражение:

$$T_{zz}(z)\exp[ib\phi(w,\bar w)] = \frac{\Delta}{(z-w)^2}\exp[ib\phi(w,\bar w)] + \ldots,$$

где $\Delta = b^2/2 + ibc$. Таким образом, условие самосогласованности записывается в виде $\Delta = \bar\Delta = ib(c - ib/2) = 1$, что дает $c = 1/ib + ib/2$.

Итак, двумя различными способами найден квантовый тензор энергии-импульса в теории Лиувилля:

$$T(z) = -(1/2)(\partial_z\phi)^2 - i(1/b - b/2)\partial_z^2\phi.$$

Это подтверждает предположение, что теория Лиувилля является конформной, причем центральный заряд в таком случае

$$c = 1 - 12(1/b - b/2)^2,$$

как можно найти, построив разложение T (z)T (w).

При построении операторных разложений были использованы корреляторы поля ϕ, как если бы оно было свободным. Расчет, проведенный на основе теории возмущений, дает тот же результат, но лишен этого недостатка. Таким образом, косвенно оправдано применение свободных полей при вычислениях.

Автор благодарен А. Маршакову и А. Миронову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. Nucl. Phys., **B241**, 333 (1984).

2. Gervais J.-L., Neveu A. Nucl. Phys., **B224**, 329 (1983); Nucl. Phys., **B209**, 125 (1982); Mansfield P. Nucl. Phys., **B222**, 419 (1983); Curtright T.L., Thorn C.B. Phys. Rev. Lett., **48**, 1309 (1982).

3. Polyakov A.M. Phys. Lett., **103B**, 207 (1981); Knizhnik V.G., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. Mod. Phys. Lett., **A3**, 819 (1988); David F. Mod. Phys. Lett., **A3**, 1651 (1988); Distler J., Kawai H. Nucl. Phys., **B321**, 509 (1989).

Поступила в редакцию 13 ноября 1990 г.