УДК 530.145

ФЕРМИОННОЕ ЧИСЛО СОЛИТОНА В ПЛОТНОМ ФЕРМИ-ГАЗЕ

В.Ф. Токарев, З.Л. Хвингия

Вычислено фермионное число солитона в плотном ферми-газе при низких температурах. Показано, что в случае тяжелых фермионов можно пользоваться квазиклассическим методом.

В некоторых моделях основное состояние солитона в присутствии фермионов является двукратно вырожденным по фермионному числу. Это вырождение обусловлено наличием нулевого связанного уровня в спектре фермионов /1/. Солитон в основном состоянии приобретает дробный фермионный заряд, который в C-симметричных моделях равен 1/2 (если нулевой уровень занят) и -1/2 (если нулевой уровень свободен) /1, 2/.

Рассмотрим свойства солитона в плотном ферми-газе при низких температурах на примере двумерной модели с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - c^2)^2 + \bar{\psi}i\hat{\partial}\psi - g\bar{\psi}\varphi\psi. \tag{1}$$

Некоторые общие свойства солитона можно исследовать из соображения симметрии /3/. В модели (1) имеется солитонное решение (кинк) $\varphi_S = c\ \mathrm{th}\ (m_H x/2)$ с массой $M = 2m_H c^2/3$. (Для удобства в дальнейшем используем систему единиц $m_H/2 = \sqrt{2\lambda}\ c/2 = 1$.)

Опишем спектр и волновые функции фермионов в поле кинка. Спектр фермионов определяется из уравнения $\hat{h}\ (\varphi_S)\psi_n = \epsilon_n\psi_n$, где $\hat{h}\ (\varphi_S) = -\, i\tau_2\partial_x + \tau_1 g\varphi_S$ - гамильтониан фермиона в поле φ_S; ψ_n - двухкомпонентный спинор; τ_1, τ_2 - матрицы Паули. Дискретный спектр дается выражением /4/

$$\epsilon_n^2 = 2mn - n^2,\ m = gc,\ n = 0,\ 1,\ldots,\ N < m, \tag{2}$$

а непрерывный спектр начинается с $\epsilon = \pm$ m.

Обозначим верхнюю и нижнюю компоненты спинора соответственно через u и v. Тогда собственные состояния гамильтониана $\hat{h}$ (φ_S) классифицируются по четности следующим образом: (u_e, v_o), (u_o, v_e). Асимптотики решений определяются стоячими волнами $u_e \to \sin(k|x| + \overset{u}{\delta_e})$ и $u_o \to \pm \sin(k|x| + \overset{u}{\delta_o})$ ($\overset{u}{\delta_e}$ и $\overset{u}{\delta_o}$ - фазы соответствующих задач рассеяния для компонент u_e и u_o). Асимптотики и, следовательно, фазы для компонент v получаются заменой $m \to m - 1$.

Граничные условия фиксируем из требования эрмитовости гамильтониана $\hat{h}$ и условия воспроизведения нулевой моды в спектре фермионов: $u_e(\infty) = 0$, $v_e(\infty) = 0$. Эти граничные условия полностью воспроизводят дискретный спектр (2) и однозначно определяют полную фазу рассеяния в виде:

$$\delta(k) = \overset{u}{\delta_e}(k) + \overset{v}{\delta_e}(k) = 2\arg\Gamma(1 + ik) - 2\arg\Gamma(1 + m + ik) + \mathrm{arctg}(k/m) -$$

$$- \mathrm{arctg}\,[\mathrm{th}(\pi k/2)\,\mathrm{ctg}(\pi m/2)] + \mathrm{arctg}\,[\mathrm{th}(\pi k/2)\,\mathrm{tg}(\pi m/2)]. \quad (3)$$

Из (3) находим асимптотику фазы при больших импульсах ($k \gg 1$, $k \gg m$):

$$\delta(k) = -\pi N + m^2/k - m^2(m^2 + 1)/6k^3 + O(1/k^5), \quad (4)$$

откуда, учитывая нормировку фазы ($\delta(0) = 0$), можно получить аналог теоремы Левинсона в исследуемой двумерной модели $\Delta\delta = \delta(\infty) - \delta(0) = \delta(\infty) = -\pi N$, причем N равно количеству ненулевых связанных состояний фермиона в поле солитона (2).

Рассмотрим ферми-газ в поле кинка при низких температурах ($T \ll m$). Предположим, что $m \gg 1$. (Случай легких фермионов ($m \ll 1$) исследован в работе /5/.) Термодинамический потенциал такого газа, без учета свободной части ($-\Omega_0 = (L/2\pi)(\mu p_F - m^2 \ln[(\mu + p_F)/m])$), дается выражением

$$-\Omega_F^s = \frac{\mu}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\mu - \epsilon_k) + \pi^{-1}\int_0^{p_F}(\mu - \epsilon_k)\,\delta'(k)\,dk, \quad (5)$$

где $p_F = \sqrt{\mu^2 - m^2}$ - импульс Ферми, μ - химический потенциал фермионов. В формуле (5) опущен вклад дираковского моря (эффекты, связанные с дираковским морем, перенормируют массу кинка) и вклад античастиц, который из-за малости температуры экспоненциально подавлен.

Для фермионного числа солитона получаем:

$$n^s_F = -\,\partial\Omega^s_F/\partial\mu = 1/2 + N + \delta\,(p_F)/\pi. \qquad (6)$$

При малых импульсах ферми $p_F \approx 0$, вкладом непрерывного спектра можно пренебречь ($\delta\,(p_F) \approx 0$). В этом пределе фермионное число солитона определяется количеством связанных состояний $n^s_F = 1/2 + N$. По мере увеличения p_F фаза $\delta\,(p_F)$, увеличиваясь по модулю, начинает сокращать вклады дискретных уровней. При $p_F \gg m$, как следует из (4), (6), все ненулевые уровни сокращаются и $n^s_F \approx 1/2$ + поправки. Поправки к полуцелому значению фермионного числа определяем с помощью асимптотики (4):

$$-\,\Omega^s_F = \mu/2 + (m^2/\pi)\ln\,(2\mu/m). \qquad (7)$$

Можно ожидать, что при $m \gg 1$ хорошо будет работать приближение медленно меняющегося поля и вычислять Ω^s_F по формуле

$$-\,\Omega^s_F = -\int [\Omega_0\,(m(x)) - \Omega_0\,(m)]\,dx, \quad m\,(x) = g\varphi_s\,(x).$$

В пределе $p_F \gg m$ эта формула воспроизводит второй член в (7). Что касается вклада нулевого уровня (первый член в формуле (7)), то он не учитывается квазиклассикой, поэтому его нужно добавить "руками". Это обстоятельство следует иметь в виду при использовании данного метода в четырехмерных моделях.

Дифференцируя по μ, из (7) получаем $n^s_F = 1/2 + O\,(m^2/\mu)$, откуда следует, что даже в плотном ферми-газе фермионное число солитона целиком определяется вкладом нулевого уровня. Это связано с тем, что при низких температурах нулевой фермионный уровень заполнен с вероятностью единица. При высоких температурах нулевой уровень с равной вероятностью может быть как заполненным, так и свободным, вследствие чего среднее фермионное число солитона становится равным нулю /6/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jackiw R., Rebbi C. Phys. Rev. **D13**, 3398 (1976).
2. Niemi A.J., Semenoff G.W. Phys. Rep. **135**, 101 (1986).
3. Niemi A.J. Nucl. Phys. **B251**, 155 (1985).
4. Dashen R.F., Hasslacher B., Neveu A. Phys. Rev. **10**, 4130 (1974); Rosen N., Morse P.M. Phys. Rev. **42**, 210 (1932).
5. Khviengia Z., Tokarev V.F. In: Proc. Int. Seminar "Quarks-90", World Sci. Publ. Co., Singapore, 1991.
6. Midorikawa S. Phys. Rev. **D31**, 1499 (1985).

Поступила в редакцию 5 декабря 1990 г.