УДК 53.02

ГРАВИТАЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ СВЕТА ПО ТЕОРИИ ИСТОЧНИКОВ

А. И. Никишов

Теория источников предсказывает появление зависимости внешней метрики шара в G^2-приближении от радиуса шара материи (и её тензора энергии-импульса). Я показываю, что в этом подходе зависимость от радиуса в отклонении безмассовой частицы проявляется только в модификации её траектории в G^2-членах, но не в полном отклонении при пролёте. В частности, кратчайшее расстояние от шара до траектории зависит не только от прицельного параметра, но и от радиуса шара.

Ключевые слова: гравитация, отклонение света, теория источников.

Под теорией источников я понимаю нахождение метрики по источникам с помощью пропагатора, а не из дифференциального уравнения [1, 2]. В этой теории внешняя метрика шара даётся выражением

$$ds^2 = -(1 + 2\phi + 2\phi^2)dt^2 + \left[1 - 2\phi + \phi^2\left(a - \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right]\delta_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta +$$

$$+ \phi^2\left(-7 + \frac{192}{35}\frac{b}{r}\right)\frac{x_\alpha x_\beta dx_\alpha dx_\beta}{r^2}\Bigg], \quad \phi = -\frac{GM}{r}. \tag{1}$$

Здесь b – радиус шара, $a = 5$ относится к случаю, когда источники берутся из общей относительности [1], а $a = 9$ – к случаю, когда источники подсказаны теорией поля [1, 2]. Переход к сферическим координатам делается с помощью соотношений

$$\delta_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad \frac{x_\alpha x_\beta dx_\alpha dx_\beta}{r^2} = dr^2. \tag{2}$$

Тогда получим

$$ds^2 = -(1 + 2\phi + 2\phi^2)dt^2 + \left[1 - 2\phi + \phi^2\left(a - 7 + \frac{128}{35}\frac{b}{r}\right)\right]dr^2 +$$

$$+ \left[1 - 2\phi + \phi^2\left(a - \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right]r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{3}$$

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: nikishov@td.lpi.ru.

Для траектории в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Тогда из (3) получим

$$ds^2 = -(1 + 2\phi + 2\phi^2)dt^2 + \left[1 - 2\phi + \phi^2 \left(a - 7 + \frac{128}{35}\frac{b}{r}\right)\right] dr^2 +$$

$$+ \left[1 - 2\phi + \phi^2 \left(a - \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right] r^2 d\varphi^2. \tag{4}$$

Траекторию находим по методу Гамильтона–Якоби, см. §101 в [3]. Из (4) имеем

$$g^{00} = -(1 - 2\phi + 2\phi^2), \quad g^{rr} = 1 + 2\phi + \phi^2 \left(11 - a - \frac{128}{35}\frac{b}{r}\right),$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}\left[1 + 2\phi + \phi^2 \left(4 - a + \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right]. \tag{5}$$

Теперь найдём

$$-(1 - 2\phi + 2\phi^2)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left[1 + 2\phi + \phi^2 \left(11 - a - \frac{128}{35}\frac{b}{r}\right)\right]\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[1 + 2\phi + \phi^2 \left(4 - a + \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right]\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 0. \tag{6}$$

Используя

$$S = -\mathcal{E}t + \mathcal{M}\varphi + S_r, \tag{7}$$

получим из (6)

$$(1 - 2\phi + 2\phi^2)\mathcal{E}^2 - \left[1 + 2\phi + \phi^2 \left(11 - a - \frac{128}{35}\frac{b}{r}\right)\right]\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 -$$

$$-\frac{\mathcal{M}^2}{r^2}\left[1 + 2\phi + \phi^2 \left(4 - a + \frac{64}{35}\frac{b}{r}\right)\right] = 0. \tag{8}$$

Используя обозначения

$$u = p/r, \quad p = \mathcal{M}/\mathcal{E}, \quad \delta = r_g/p = \frac{2MG}{p}, \quad B = \frac{16}{35}\frac{b}{p}, \quad -2\phi = r_g/r = u\delta, \tag{9}$$

из (8) получим

$$S_r = \int dr \left\{\mathcal{E}^2 \left[1 + 2u\delta + \frac{1}{4}u^2\delta^2(a - 1 + 8Bu)\right] -\right.$$

$$\left. - \mathcal{M}^2 \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{7}{4}u^2\delta^2 + 3Bu^3\delta^2\right]\right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Траектория определяется из соотношения $\dfrac{\partial S}{\partial \mathcal{M}} = \mathrm{const}$. Используя (7) и (10), получим

$$\varphi = -\int \frac{dr}{r^2 \mathcal{E}} \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{f(u)}} \left[1 - \frac{7}{4}u^2\delta^2 + 3Bu^3\delta^2\right], \tag{11}$$

где

$$f(u) = 1 + 2u\delta + u^2\left(\frac{a-1}{4}\delta^2 - 1\right) + 2Bu^3\delta^2 + \frac{7}{4}u^4\delta^2 - 3Bu^5\delta^2. \tag{12}$$

Теперь найдём пределы интегрирования в (11) для входящей половины траектории, когда r пробегает значения от бесконечности до $r_{\min}$. Для этого нужно найти минимальный корень выражения $f(u) = 0$. Для $\delta = 0$ два корня выражения $f(u) = 0$ равны $u_1 = -1, u_2 = 1$. Методом Ньютона находим корни нашего выражения

$$u_1 = -1 + \delta - \delta^2\left(\frac{a}{8} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}B\right), \quad u_2 = 1 + \delta + \delta^2\left(\frac{a}{8} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}B\right). \tag{13}$$

Сравним аналогичные вычисления в [4]. Заметим, что $u_1(\delta, B) = -u_2(-\delta, -B)$. Итак, пределы интегрирования для угла отклонения $\varphi_{1/2}$ на половине траектории таковы: 0 и u_2.

Теперь упростим подынтегральное выражение в (11). Используя корни в (13), запишем (12) в виде

$$f(u) = -(u-u_1)(u-u_2)\left[1 - \delta^2\left(\frac{a}{4} + \frac{3}{2}\right) + \delta^2\left(3Bu^3 - \frac{7}{4}u^2 + Bu\right)\right]. \tag{14}$$

Выражение в квадратных скобках можно переписать в виде

$$\left[1 - \delta^2\left(\frac{a}{4} + \frac{3}{2}\right)\right]\left[1 + \delta^2\left(Bu - \frac{7}{4}u^2 + 3Bu^3\right)\right].$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{f(u)}} = \frac{1}{\sqrt{-(u-u_1)(u-u_2)}} \times$$
$$\times \left[1 + \delta^2\left(\frac{a}{8} + \frac{3}{4}\right)\right]\left[1 + \delta^2\left(-\frac{1}{2}Bu + \frac{7}{8}u^2 - \frac{3}{2}Bu^3\right)\right]. \tag{15}$$

Используя (11), находим

$$\varphi_{1/2} = \left[1 + \delta^2\left(\frac{a}{8} + \frac{3}{4}\right)\right] \int\limits_0^{u_2} \frac{du}{\sqrt{-(u-u_1)(u-u_2)}} \times$$
$$\times \left[1 + \delta^2\left(-\frac{1}{2}Bu - \frac{7}{4}u^2 + \frac{3}{2}Bu^3\right)\right]. \tag{16}$$

Итак, нам нужны интегралы

$$I_n = \int\limits_0^{u_2} \frac{u^n du}{\sqrt{-(u-u_1)(u-u_2)}}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Для $n = 0$ имеем

$$I_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{u_1+u_2}{u_2-u_1} = \frac{\pi}{2} + \delta - \frac{1}{2}B\delta^2. \tag{17}$$

Другие интегралы нужны при $\delta = 0$. Для них получим $I_1 = 1, \quad I_2 = \dfrac{\pi}{4}, \quad I_3 = \dfrac{2}{3}$.

Когда источники взяты из общей относительности, найдём

$$\varphi_{1/2}\big|_{a=5} = \frac{\pi}{2} + \delta + \frac{15}{32}\pi\delta^2. \tag{18}$$

До некоторой степени неожиданно радиус шара выпал из этого выражения (в рассматриваемом приближении) и результат такой же как в общей относительности [4]. Однако кратчайшее расстояние до траектории $r_{\min}$ (получаемое из соотношения $u_2|_{a=5} = 1 + \delta + \delta^2\left(\dfrac{15}{8} - \dfrac{1}{2}B\right) = p/r_{\min}$) зависит от радиуса b. Напомним, что прицельный параметр p введен вместо сохраняющегося параметра углового момента $\mathcal{M} = \mathcal{E}p$. Для источников, подсказанных теорией поля [1, 2], получим из (16) и (13)

$$\varphi_{1/2}\big|_{a=9} = \frac{\pi}{2} + \delta + \frac{23}{32}\pi\delta^2, \quad u_2\big|_{a=9} = 1 + \delta + \delta^2\left(\frac{19}{8} - \frac{1}{2}B\right), \quad B = \frac{16}{35}\frac{b}{p}. \tag{19}$$

Снова $\varphi_{1/2}$ не зависит от B (то есть от b). Таким образом зависимость внешней метрики от радиуса шара материи проявляется только в форме траектории пробной частицы (см. подынтегральное выражение в (16)), но не в величине угла её отклонения. Уходящяя половина траектории вносит такой же вклад в отклонение как и входящая. Таким образом, полный угол отклонения при пролёте равен $2\varphi_{1/2} - \pi$.

Итак, предсказываемая теорией источников зависимость внешней метрики от радиуса шара материи в принципе должна проявляться в форме траектории релятивистской частицы, пролетающей через гравитационное поле шара.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] А. И. Никишов, Краткие сообщения по физике ФИАН **44**(10), 17 (2017).

[2] A. I. Nikishov, Part. Nucl. **37**, 776 (2006).

[3] L. D. Landau and E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, New York, 1980).

[4] A. I.Nikishov, Part. Nucl. Letters **6**, N6 (155), 704 (2009).

Поступила в редакцию 9 ноября 2018 г.
После доработки 12 апреля 2019 г.
Принята к публикации 16 апреля 2019 г.