УДК 539

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТОНОВ В МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЕ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

С. А. Маслов[1], С. Я. Бронин[1], Н. Г. Гусейн-заде[2], С. А. Тригер[1,2]

Показано, что распределение фотонов для полностью ионизированной плазмы со слабым межчастичным взаимодействием при малых значениях импульса фотона k асимптотически соответствует распределению Планка. При увеличении k наблюдается уменьшение числа фотонов по сравнению с Планковским. Вычисление асимптотики для больших значений k требует учета эффектов взаимодействия.

Ключевые слова: распределение фотонов, диэлектрическая проницаемость, электрон.

Введение. Равновесное распределение фотонов в космическом микроволновом фоне ("Cosmic Microwave Background" – CMB) [1, 2] с высокой точностью подчиняется закону Планка [3]. Однако в [4] найдены отклонения от закона Планка, характер которых до сих пор не ясен (см. [5]). Отклонения от закона Планка также возможны и в лабораторных условиях, однако в настоящее время проведение измерений доступно лишь в ограниченной области частот ω, при $\lambda \simeq 0.4 \div 0.7$ μm или $\omega \simeq (2.6 \div 4.7) \cdot 10^{17}$ sec^{-1}.

Спектральная плотность энергии равновесного излучения (СПЭРИ) первичной плазмы, существовавшей на ранней стадии Вселенной в заряженной среде высокой плотности, несомненно зависела от ее плотности.

Проблема влияния плотности плазмы на СПЭРИ рассматривалась начиная с работ Бриллюэна (L. Brillouin). При этом были получены различные не совпадающие друг с другом результаты. Главной особенностью всех этих рассмотрений является пренебрежение взаимодействием с веществом, хотя излучение может достичь равновесного состояния только при наличии такого взаимодействия. Тем не менее, плотность вещества в формуле Планка отсутствует.

[1] Объединенный институт высоких температур РАН, 125412 Россия, Москва, Ижорская ул., 2.
[2] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: satron@mail.ru.

В [6] влияние плазмоподобного вещества на СПЭРИ рассматривалось на основе флуктуационно-диссипационной теоремы и расчета корреляционных функций электрического и магнитного полей. В [7] рассмотрение СПЭРИ было развито для учета влияния движения заряженных частиц под действием поля на полную энергию системы. В предельном случае прозрачной среды в [7] был воспроизведен результат [8] для СПЭРИ в случае холодной плазмы. Однако, в подходах [6, 7], выделение нулевых колебаний из обобщенного распределения Планка не может быть выполнено однозначно.

Микроскопический подход, который учитывает пространственную и частотную зависимость диэлектрической проницаемости (ДП) (а также эффекты кулоновских столкновений в плазме), был развит в недавних работах [9, 10] с использованием подхода квантовой электродинамики (КЭД), где заряженные частицы и свободные фотоны существуют как изначально заданные и взаимодействующие поля. При этом была установлена решающая роль пространственной дисперсии поперечной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ для вычисления СПЭРИ и обнаружены длинный хвост СПЭРИ при больших значениях частоты излучения и логарифмическая особенность СПЭРИ при малых значениях частоты [11].

В связи с необходимостью учета свойств плазмы в СПЭРИ возникает вопрос о влиянии ДП на функцию распределения фотонов (ФРФ) [12] по сравнению с распределением Бозе-Эйнштейна. Целью данной работы является рассмотрение ФРФ и ее асимптотического поведения в квазиклассической (максвелловской) плазме. Эта проблема может быть решена явно в импульсном пространстве k.

Функция распределения фотонов и диэлектрическая проницаемость. Воспользуемся соотношением для функции распределения фотонов $f(k)$ в плазменной среде на основе подхода квантовой электродинамики [9]:

$$f(Y)=\alpha^{3/2}2\sqrt{2}\,Y\int\limits_0^\infty \frac{dW}{2\pi}\coth\left(\frac{W}{2}\right)\frac{\Psi(Y,W)}{[(\alpha\Phi(Y,W)-2Y^2]^2+(\alpha\Psi(Y,W))^2}-\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Функции $\Phi(Y,W)=W^2\mathrm{Re}\varepsilon^{tr}(Y,W)$ и $\Psi(Y,W)=W^2\mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(Y,W)$ выражаются через поперечную ДП плазмы $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ [10], учитывающую собственный магнитный момент электрона для квазиклассической плазмы. Для рассматриваемого случая однокомпонентной системы электронов функции $\Phi(Y,W)$ и $\Psi(Y,W)$, равны

$$\Phi(Y,W) = W^2 \mathrm{Re}\varepsilon^{tr}(Y,W) = W^2 - 2\Gamma\eta^{2/3} - \Gamma\eta^{2/3}\left\{\left[\frac{W}{Y^2} + \frac{Y^2}{2}\right]\times\right.$$
$$\times\left[{}_1F_1\left(1,\frac{3}{2};-\left(\frac{W}{2Y}-\frac{Y}{2}\right)^2\right) - {}_1F_1\left(1,\frac{3}{2};-\left(\frac{W}{2Y}+\frac{Y}{2}\right)^2\right)\right]\left.\right\} + \Gamma\eta^{2/3}\left\{\left[1+\frac{Y^2}{2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[{}_1F_1\left(1,\frac{3}{2};-\left(\frac{W}{2Y}-\frac{Y}{2}\right)^2\right) + {}_1F_1\left(1,\frac{3}{2};-\left(\frac{W}{2Y}+\frac{Y}{2}\right)^2\right)\right]\right\}, \quad (2)$$

$$\Psi(Y,W) = W^2 \mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(Y,W) = 2\sqrt{\pi}\,\Gamma\eta^{2/3}\left(\frac{1}{Y}+\frac{Y}{2\pi}\right)\exp\left(-\frac{W^2}{4Y^2}-\frac{Y^2}{4}\right)\sinh\left(\frac{W}{2}\right). \quad (3)$$

Здесь мы ввели безразмерные переменные $W = \hbar\omega/T$, $Y = k\Lambda/\sqrt{4\pi}$, где T – температура плазмы, а $\Lambda = (2\pi\hbar^2/mT)^{1/2}$ – длина де Бройля волны электрона. В задаче есть два независимых безразмерных малых параметра $\Gamma = e^2 n^{1/3}/T \ll 1$ и $\eta = n\Lambda^3 \ll 1$, при этом в (1) величина $\alpha = T/mc^2 \equiv (e^2/\hbar c)^2\eta^{2/3}/(2\pi\Gamma)^2 \ll 1$, где $e^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры. Функция ${}_1F_1(\nu,\mu;x)$ является вырожденной гипергеометрической функцией.

Когда параметр взаимодействия $\Gamma \to 0$, вещественная и мнимая части $\varepsilon^{tr}(Y,W)$ стремятся к 1 и 0, соответственно и (1) превращается в распределение Планка для фотонов $f^{Pl}(Y) = [\exp(\sqrt{2/\alpha}Y) - 1]^{-1}$. Чтобы учесть кулоновское взаимодействие между электронами исследуем асимптотическое поведение ФРФ $f(Y)$ в (1) для длинных волн, когда $Y^{1/4} \ll \alpha\Gamma\eta^{2/3} \ll 1$. Разобьем интеграл для $f(Y)$ в (1) на четыре

$$f(Y) = \int_0^{Y^{3/2}} f_1(Y,W)dW + \int_{Y^{3/2}}^{Y} f_1(Y,W)dW + \int_{Y}^{Y^{1/4}} f_1(Y,W)dW + \int_{Y^{1/4}}^{\infty} f_1(Y,W)dW - \frac{1}{2},$$
$$f_1(Y,W) = \frac{\alpha^{3/2}2\sqrt{2}\,Y}{2\pi}\coth\left(\frac{W}{2}\right)\frac{\Psi(Y,W)}{[(\alpha\Phi(Y,W)-2Y^2]^2 + (\alpha\Psi(Y,W))^2}. \quad (4)$$

Проведем оценку интегралов в (4) используя соответствующие разложения функции ${}_1F_1(\nu,\mu;x)$.

1. В области $W \le Y^{3/2}$ находим

$$\alpha\Phi(Y,W) - 2Y^2 \cong -\alpha\Gamma\eta^{2/3}\frac{W^2}{Y^2} - 2Y^2; \qquad \Psi(Y,W) \cong \sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}W/Y. \quad (5)$$

Учитывая неравенство $\alpha\Gamma\eta^{2/3}W^2/Y^2 \ll \Psi(Y,W)$ для $W \leq Y^{3/2}$, $2Y^2 \ll 1$, находим приближенно для первого интеграла I_1 в (4)

$$I_1 \equiv \int\limits_0^{Y^{3/2}} f_1(Y,W)dW \cong \alpha^{3/2}2\sqrt{2}Y \int\limits_0^{Y^{3/2}} \frac{dW}{2\pi}\coth\left(\frac{W}{2}\right)\frac{\Psi(Y,W)}{4Y^4+(\alpha\Psi(Y,W))^2} \cong \frac{\sqrt{2\alpha}}{2Y}. \quad (6)$$

2. В области $Y^{3/2} \leq W \leq Y$, используя оценки $\sinh(W/2) \geq W/2$, $\coth(W/2) \leq (2/W)\cosh(W/2) < 2/[W(1-W^2/4)] < 4/W \leq 4/Y^{3/2}$ и следующее из (3) неравенство

$$\Psi(Y,W) \geq \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\eta^{2/3}W}{Y}\exp\left(-\frac{W^2}{4Y^2}-\frac{Y^2}{4}\right) > \sqrt{\pi}\,\Gamma\eta^{2/3}\mathrm{e}^{-1}, \quad (7)$$

для второго интеграла в (4) можно получить

$$\int\limits_{Y^{3/2}}^{Y} f_1(Y,W)dW < \alpha^{-1/2}4\sqrt{2}Y^{-1/2}\int\limits_{Y^{3/2}}^{Y}\frac{\mathrm{e}^{1/4}dW}{\pi\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}} < \frac{4\sqrt{2Y}\mathrm{e}}{\pi\sqrt{\pi\alpha}\Gamma\eta^{2/3}} \ll I_1. \quad (8)$$

3. В области $Y \leq W \leq Y^{1/4}$, как следует из (2) и асимптотики ${}_1F_1(1,3/2,-x^2) \cong 1/2x^2$ для $x \gg 1$ вырожденной гипергеометрической функции,

$$\Phi(Y,W) \cong W^2 - 2\Gamma\eta^{2/3} - \frac{4\Gamma\eta^{2/3}Y^2}{W^2}, \qquad \Psi(Y,W) \leq \sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}\cdot\frac{2W}{Y}. \quad (9)$$

Выражение (9) также справедливо для $Y \leq W \leq Y^{1/4}$. Следовательно, третий интеграл в (4) может быть оценен как (где конечное $M >> Y^{1/4} > 0$)

$$\int\limits_{Y}^{Y^{1/4}} f_1(Y,W)dW \leq \alpha^{3/2}8\sqrt{2}\int\limits_{Y}^{Y^{1/4}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}dW}{\pi M^2} \leq \frac{\alpha^{3/2}8\sqrt{2\pi}\Gamma\eta^{2/3}Y^{1/4}}{\pi M^2} \ll I_1. \quad (10)$$

4. В области $W \gg Y^{1/4}$ асимптотическое поведение $\Phi(Y,W)$ удовлетворяет (9) а асимптотика $\Psi(Y,W)$ имеет вид

$$\Psi(Y,W) \cong \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\eta^{2/3}}{Y}\exp\left(-\frac{W^2}{4Y^2}\right)\sinh\left(\frac{W}{2}\right). \quad (11)$$

Таким образом асимптотическое поведение фотонной функции распределения $f(Y)$ совпадает с асимптотикой распределения Планка $f(Y) \cong \sqrt{2\alpha}/2Y - 1/2 \cong \sqrt{2\alpha}/2Y$ при $Y \ll 1$

$$f(Y \ll 1) \cong f^{Pl}(Y \ll 1) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2Y} - \frac{1}{2}, \quad (12)$$

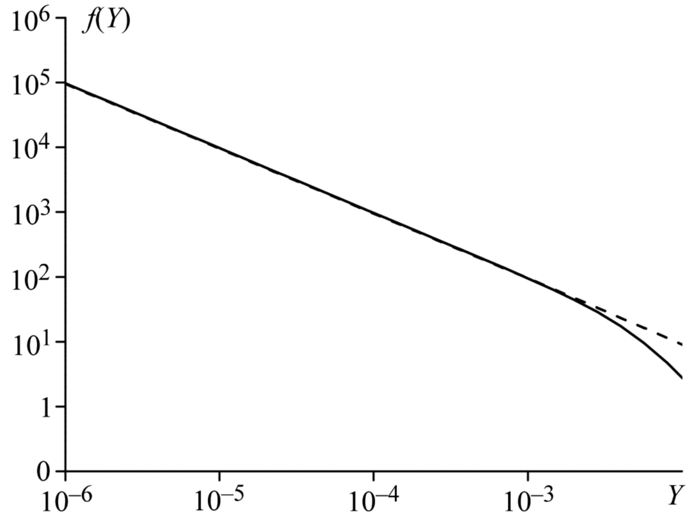

Рис. 1: *Графики* $f(Y)$ *(сплошная линия) согласно* (4) *и* $f^{Pl}(Y)$ *(пунктирная линия) согласно* (12) *для* $\Gamma = 0.01$ *и* $\eta = 0.1$ ($\alpha \approx 1.83 \cdot 10^{-2}$) *для асимптотически малых* Y. *Горизонтальный масштаб является логарифмическим, вертикальный – линейным для* $0 \le f(Y) \le 1$, $0 \le f^{Pl}(Y) \le 1$ *и логарифмическим для других.*

На рис. 1 представлен численный расчет функций $f(Y)$ и $f^{Pl}(Y)$ в области малых Y. Отличия $f(Y)$ от распределения Планка $f^{Pl}(Y)$ появляются с ростом Y.

При $Y \to 0$ оба распределения – Планковское $f^{Pl}(Y)$ и $f(Y) \cong \sqrt{2\alpha}/2Y - 1/2 \cong \sqrt{2\alpha}/2Y$ совпадают. Полученный результат означает, что кулоновское взаимодействие между электронами не оказывает существенного влияния на распределение фотонов для длинных волн.

Рассмотрение асимптотики функций $\Phi(Y, W)$ и $\Psi(Y, W)$ для коротких длин волн ($Y \gg 1$) приводит к выражению для равновесной ФРФ в виде

$$f(Y) \simeq \tilde{f}(Y) - \frac{\Gamma\eta^{2/3}(3-2\alpha)}{Y^4} = \tilde{f}(Y)\left(1 - \frac{\alpha^{1/2}\pi(3-2\alpha)\,Y}{\sqrt{2}}\right), \qquad \tilde{f}(Y) = \frac{\Gamma\eta^{2/3}\sqrt{2}}{\pi\alpha^{1/2}Y^5}. \quad (13)$$

Поскольку $\alpha = T/mc^2 \equiv [e^2/(\hbar c)]^2\eta^{2/3}/(2\pi\Gamma)^2 \ll 1$, где $e^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры, можно сделать вывод, что учет последнего слагаемого в (13) является превышением точности для случая слабо взаимодействующего нерелятивистского электронного газа. При $\alpha \ll 0.02$ асимптотическая зависимость $\tilde{f}(Y)$ сохраняется вплоть $T \simeq 10^6$ K. Следовательно, для коротковолнового приближения мы находим длинный хвост степенного типа в ФРФ для случая слабого взаимодействия в электронном газе в отличие от Планковского распределения.

Авторы благодарны А. Г. Загороднему, А. М. Игнатову и М. В. Федорову за полезные обсуждения. С. А. Маслов и С. А. Тригер благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований (РФФИ) за поддержку их работы (грант № 17-02-00573а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] G. Gamow, *The Creation of the Universe* (Viking, 1961), revised edition.

[2] A. A. Penzias, and R. W. Wilson, Astrophysical Journal **142**, 419 (1965).

[3] M. Planck, Annalen der Physik **4**, 553 (1901).

[4] P. Lubin, T. Villela, G. Epstein, G. Smoot, Astrophys. J. Lett. **298**, L1 (1985).

[5] P. A. R. Ade et al., A measurments of the cosmic microwave background B-mode polarization power spectrum at sub-degree scales from 2 years of polarbear data (Planck Collab.), arXiv:1705.02907v2 [astro-ph.CO] (2017).

[6] M. Opher, R. Opher, Phys. Rev. Letters **79**(14), 2628 (1997).

[7] С. А. Тригер, А. Г. Загородний, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(5), 45 (2018).

[8] S. A. Trigger, Physics Letters A **370**, 365 (2007).

[9] В. Б. Бобров, И. М. Соколов, С. А. Тригер, Письма в ЖЭТФ **101**, 326 (2015) [V. B. Bobrov, I. M. Sokolov, and S. A. Trigger, JETP Lett. **101**, 299 (2015)].

[10] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, ТМФ **192**(3), 523 (2017) [V. B. Bobrov, S. A. Trigger, Theoret. and Math. Phys. **192**(3), 1396 (2017)].

[11] С. А. Маслов, С. А. Тригер, Н. Г. Гусейн-заде, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(8), 14 (2018) [S. A. Maslov, S. A. Trigger, N. G. Goussein-zade, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **45**(8), 233 (2018)].

[12] В. Б. Бобров, ТМФ **88**(1), 141 (1991) [V. B. Bobrov, Theoret. and Math. Phys. **88**(1), 773 (1991)].

Поступила в редакцию 19 марта 2019 г.
После доработки 5 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 июля 2019 г.