УДК 539

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЯХ В КУЛОНОВСКОЙ СИСТЕМЕ

А. М. Игнатов[1], С. А. Тригер[1,2]

Рассмотрение равновесного излучения в плазмоподобных средах показывает, что спектральное распределение энергии такого излучения отлично от планковского равновесного излучения. На основе полученного ранее соотношения для спектральной плотности энергии равновесного излучения в системе заряженных частиц, учитывающего конечное затухание в пространственно-диспергирующей среде, рассмотрен предельный случай бесконечно малого затухания. Показано, что нулевые вакуумные колебания, являющиеся частью полного спектрального распределения энергии в среде, должны быть перенормированы при использовании определенных моделей для поперечной диэлектрической проницаемости плазмы. При этом перенормированные нулевые вакуумные колебания начинают зависеть от параметров плазмы. Обсуждается возможность проявления этого эффекта.

Ключевые слова: спектральное распределение излучения, нулевые колебания, кулоновская плазма, диэлектрическая проницаемость, пространственная дисперсия.

Равновесное распределение фотонов по энергиям было установлено Максом Планком [1, 2] в 1900 году и представляет собой фундаментальное соотношение, инициировавшее развитие квантовой теории. Согласно закону Планка спектральная плотность энергии равновесного излучения (СПЭРИ) или так называемого излучения абсолютно черного тела определяется выражением:

$$e_P(\omega) \equiv \frac{dE(\omega)}{d\omega} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T)-1}, \tag{1}$$

[1] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38.

[2] ОИВТ РАН, 125412 Россия, Москва, Ижорская ул., 2; e-mail: satron@mail.ru.

где V – объем, в котором заключено излучение, T – температура среды (в энергетических единицах), окружающей этот объем, c – скорость света в вакууме. При выводе распределения Планка считается, что фотоны находятся в термодинамическом равновесии с окружающим веществом, хотя в явном виде взаимодействие фотонов со стенками объема не учитывается. Взаимодействие между фотонами и веществом в полости для получения планковского вида СПЭРИ должно быть достаточно малым, чтобы обеспечить идеальность фотонного газа и отсутствие существенного поглощения и необратимого затухания электромагнитного излучения в объеме V (взаимодействие фотонов между собой является чрезвычайно слабым). В то же время наличие вещества и слабое взаимодействие между ним и излучением необходимо для существования равновесия фотонного газа [3]. Эти условия с хорошей степенью точности выполняются, например, в разреженной плазме для любых частот, находящихся вдали от частот, отвечающих линиям поглощения вещества.

Закон Планка был многократно экспериментально подтвержден, например, путем накачки лазерного излучения в полость в веществе, имеющую малое отверстие, и последующего наблюдения выходящего через это отверстие излучения. Спектральное распределение излучения, исходящего из почти пустой полости, в измеряемом спектральном интервале оказывается близким к планковскому.

Изучение явного влияния наличия вещества на спектральную плотность энергии равновесного излучения [4] сравнительно недавно получило дальнейшее развитие [5–8]. При этом в [6] (см. также [8]) предполагалось, что вещество представляет собой полностью ионизованную плазму, в которой спектр поперечных электромагнитных колебаний (для невырожденных электронов) определяется выражением $\omega = \sqrt{c^2k^2 + \omega_p^2}$, где ω_p – плазменная частота. В [6] считалось, что затухание колебаний пренебрежимо мало, а пространственная дисперсия, определяемая зависимостью поперечной диэлектрической проницаемости (ДП) $\varepsilon^{tr}(k, \omega)$ от волнового вектора k, отсутствует. Такой подход фактически соответствует приближению Бриллюэна для энергии поля в прозрачной среде (см. [4, 9] и цитированную там литературу). Основными особенностями влияния плазмы на спектральное распределение излучения, выявленными в [6], являются отсутствие излучения в интервале частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_p$ и резкое падение полной энергии излучения при увеличении характерного безразмерного параметра $\hbar\omega_p/T$.

Более строгий теоретико-полевой подход, основанный, однако, на нерелятивистском приближении для частиц, но учитывающий как временную, так и пространственную дисперсию поперечной диэлектрической проницаемости развит в [7, 8] и [10, 11]. При этом результаты [8, 9] основаны на применении флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ) и введении сторонних токов, и соответствует классическому описанию частиц, а результаты [7, 10, 11] на квантово-полевом подходе, а также не использует сторонние источники. Результаты оказываются формально близки, но приводят к некоторым отличиям. Поскольку использование сторонних источников в задаче о собственном СПЭРИ в плазме вызывает определенные вопросы, ниже мы будем основываться на выражении для СПЭРИ $e(\omega)$ в рамках квантово-полевого подхода [7, 10]. Если с самого начала исключены вакуумные нулевые колебания в том же виде $e_0(\omega) = V\hbar\omega^3/2\pi^2c^3$, как при отсутствии плазмы, то СПЭРИ имеет вид

$$e(\omega) = e_P(\omega) + \Delta e(\omega), \tag{2}$$

где $\Delta e(\omega)$ полностью определяется поперечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$

$$\Delta e(\omega) = \frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\left[\frac{c^5}{\pi\omega}\int_0^\infty dkk^4\frac{\mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)}{|\omega^2\varepsilon^{tr}(k,\omega)-c^2k^2\ |^2}-\frac{1}{2}\right]. \tag{3}$$

Основная проблема заключается в том, что установить положительность выражения (2) при всех частотах не представляется возможным. В этой связи возникают два возможных сценария. Либо следует принять, что выражение (2) положительно для точного (но неизвестного) вида поперечной ДП, а также для каких-то удачно построенных приближений для поперечной ДП, либо следует перенормировать нулевые колебания с учетом наличия плазменной среды. В связи с последним, следует обратиться к полной форме спектральной плотности $e^{\mathrm{full}}(\omega)$ которая, как следует из выражения для $e_0(\omega)$ и (2), (3), равняется

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{full}}(\omega) = \frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\frac{c^5}{\pi\omega}\times \\ \times\int_0^\infty dkk^4\frac{\mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)}{(\omega^2\mathrm{Re}\varepsilon^{tr}(k,\omega)-c^2k^2)^2+\omega^4(\mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega))^2}\end{aligned} \tag{4}$$

и *всегда положительна.*

Рассмотрим в качестве примера простейший случай бесстолкновительной электронной системы при отсутствии пространственной дисперсии. Затухание Ландау при этом также отсутствует, поскольку фазовая скорость поперечных волн больше скорости света. Для такой модели точная ДП ε^{el} (продольная и поперечная ДП совпадают), как известно, равняется

$$\varepsilon^{el}(\omega) = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \tag{5}$$

С учетом отсутствия затухания, принимая $\omega^2 \mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega) \to +0$ и образуя под интегралом δ-функцию от аргумента $\omega^2 - e^{el}(\omega) - c^2k^2$, после интегрирования приходим к выражению

$$e^{\mathrm{full}}(\omega) = \frac{V\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{3/2}\theta(\omega-\omega_p)+ \\ +\frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/T)-1}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{3/2}\theta(\omega-\omega_p). \tag{6}$$

Первый член в выражении (6) может рассматриваться как перенормированные нулевые колебания, а второй – как видоизмененное частицами распределение Планка. При этом модифицированные нулевые колебания, равно как и модифицированное планковское распределение, являются уже функциями плотности числа электронов. Это явление в определенном смысле сродни эффекту Казимира [12], но в рассматриваемой задаче искажение плотности энергии вакуумных фотонов происходит не из-за наличия окружающих объем проводников, а из-за присутствия плазменной среды.

Результат, аналогичный (6), был получен из физических соображений в [6, 8] с тем отличием, что в [6] (и в [8] в соответствующем пределе) стоит квадратный корень из ДП (5), что и характеризует разницу в рассматриваемом полевом подходе и в приближении через ФДТ. Впрочем, и в последнем случае, основное утверждение данной работы о возникновении модифицированных нулевых колебаний в плазменной среде сохраняется.

Необходимо отметить, что если в выражении (6) нулевые колебания оставить в вакуумном виде, обеспечивающем возможность их рассмотрения как ненаблюдаемого фона, то оставшаяся наблюдаемая часть СПЭРИ $\overline{e}(\omega)$ всегда является отрицательной при больших ω

$$\overline{e}(\omega) \simeq -\frac{3V\hbar\omega\omega_p^2}{4\pi^2c^3}\theta(\omega-\omega_p)+ \\ +\frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/T)-1}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{3/2}\theta(\omega-\omega_p), \tag{7}$$

что невозможно из физических соображений.

Обобщим теперь полученный результат (6), используя соотношение (5), на случай плазменной среды с более общей диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ в случае пренебрежимого затухания и отсутствия пространственной дисперсии (напр., для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_{a=e,i}\omega_a^2/\omega^2$ электрон-ионной плазмы). Очевидным результатом является

$$e^{\text{full}}(\omega)=\frac{V\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}\varepsilon^{3/2}(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\theta[\varepsilon(\omega)]=$$
$$=\frac{V\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}\varepsilon^{3/2}(\omega)\theta[\varepsilon(\omega)]+\frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/T)-1}\varepsilon^{3/2}(\omega)\theta[\varepsilon(\omega)]. \tag{8}$$

Заметим, однако, что учет конечного столкновительного затухания без учета пространственной дисперсии невозможен, поскольку, как легко показать, приводит к расходящемуся результату.

Основной вопрос, на который следует дать ответ в будущем: является ли перенормировка нулевых колебаний, выявленная выше для незатухающей ДП электронного газа, свойством используемой модели или такая перенормировка существует всегда. В случае, если эта перенормировка является свойством модели и для неизвестной и недостижимой для вычисления точной ДП она предположительно отсутствует, то выражение $e(\omega)$ (2) для такой гипотетически точной ДП всегда должно быть положительным и стремиться к нулю при $\omega\to\infty$. В этом случае хорошими моделями для поперечной ДП являются только те, которые обеспечивают положительность функции $e(\omega)$ при всех частотах и ее стремление к нулю при асимптотически больших ω. При этом нулевые колебания для хороших моделей ДП остаются теми же, что и в вакууме. Если бы это было верно, то выражение (7) показывает, что использованная модель ДП (5) не может рассматриваться как хорошая.

Если же известные модели ДП будут приводить к отрицательным значениям $e(\omega)$ при каких-то значениях ω, это будет веским (хотя и не полностью доказательным) аргументом в пользу того, что представление о перенормировке нулевых колебаний в плазменной среде, рассматриваемое в этой работе, с необходимостью существует в том или ином виде, в зависимости от используемой модели для $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ в (4). Общее правило выделения этой перенормировки в настоящий момент не известно и требует дополнительного исследования. Можно предположить, что общим правилом перенормировки нулевых колебаний является тождественное преобразование $\coth(\hbar\omega/2T)=1+2[\exp(\hbar\omega/T)-1]^{-1}$ в (4).

При этом уравнение (4) разделяется соответственно на две части, первая из которых представляет собой перенормированные в плазме нулевые колебания, а вторая — модифицированное для плазменной среды квазипланковское распределение, экспоненциально спадающее для высоких частот

$$e^{\text{full}}(\omega)=\frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{c^5}{\pi\omega}J+\frac{2}{\exp(\hbar\omega/T)-1}J, \tag{9}$$

$$J \equiv \int_0^\infty dk k^4 \frac{\mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)}{(\omega^2 \mathrm{Re}\varepsilon^{tr}(k,\omega) - c^2k^2)^2 + \omega^4(\mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega))^2}. \qquad (10)$$

Преимущество предлагаемого разделения СПЭРИ состоит в том, что первый член в (9) переходит при стремящейся к нулю плотности плазмы в вакуумные нулевые колебания, а второй – в распределение Планка. Более того, это общее правило приводит и к рассмотренным выше результатам (6) и (8). При этом оба члена в (9) являются положительными и должны проявляться экспериментально при конечной плотности плазменной среды. Иной способ выделения квазипланковской части должен привести к ее степенной асимптотике при больших частотах ω, качественно подобной асимптотике, полученной в [10, 11]. Такое различие, равно как и проявление сил, связанных с перенормированными нулевыми колебаниями, может быть обнаружено экспериментально. Соответствующие эксперименты нуждаются в отдельном обсуждении.

С. А. Тригер благодарен Российскому фонду фундаментальных исследований (РФФИ) за поддержку этой работы (грант номер 17-02-00573а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Planck, Annalen der Phys. **1**, 719 (1900).

[2] M. Planck, Annalen der Physik **4**, 553 (1901).

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, часть 1* (М., Физматлит, 2002).

[4] М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике* (М., Наука, 1967).

[5] M. Opher, R. Opher, Phys. Rev. Letters **79**(14), 2628 (1997).

[6] S. A. Trigger, Physics Letters A **370**, 365 (2007).

[7] В. Б. Бобров, И. М. Соколов, С. А. Тригер, Письма в ЖЭТФ **101**, 326 (2015).

[8] С. А. Тригер, А. Г. Загородний, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(5), 45 (2018).

[9] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, часть 2* (М., Физматлит, 2004).

[10] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, ТМФ **187**, вып. 1, 104 (2016).

[11] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, ТМФ **192**, вып. 3, 523 (2017).

[12] H. B. G. Casimir, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **51**, 793 (1948).

Поступила в редакцию 11 сентября 2019 г.

После доработки 19 декабря 2019 г.

Принята к публикации 20 декабря 2019 г.