УДК 537.8

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ УМОВА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ПРОТЯЖЁННОГО ЭЛЕКТРОНА

С. В. Блинов

В работе рассматривается вектор плотности потока электромагнитной энергии в форме Пойнтинга и связанная с этим определением проблема электромагнитного импульса электрона. В статье также анализируется и альтернативное определение плотности потока – вектор Умова, значение которого совпадает с вектором Пойнтинга лишь для пустого пространства. Для качественного сравнения дифференциальных и интегральных значений этих двух векторов в случае заполненного пространства исследуется модель протяжённого электрона, зарядовая плотность которого обратно пропорциональна четвёртой степени расстояния от центра симметрии. Показано, что вектор Умова в данной ситуации оказывается более универсальным, поскольку в соответствующем законе сохранения энергии отсутствует член, отвечающий за переход электромагнитной энергии в другие виды энергии.

Ключевые слова: вектор Умова, вектор Пойнтинга, плотность потока электромагнитной энергии, протяжённый электрон, непустое пространство.

Введение. Проблема электромагнитного импульса электрона в классической теории поля в рамках рассмотрения только электромагнитных сил остаётся неразрешимой в настоящее время, а расходимость интеграла энергии точечной заряженной частицы делает неприменимым рассмотрение электрона нулевых размеров на масштабах порядка классического радиуса [1].

МФТИ, 141701 Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9; e-mail: serj_blinov@mail.ru.

В данной работе будет рассмотрено непрерывное распределение плотности заряда электрона [2, 3], лоренц-инвариантный интеграл от которого в точности равен элементарному заряду, а суммарная электромагнитная энергия оказывается конечной величиной. Будет исследовано поведение вектора плотности потока электромагнитной энергии при движении такого заряда. Использование вектора Пойнтинга для описания потока приводит к уже известной проблеме электромагнитного импульса [4], поэтому в качестве плотности потока электромагнитной энергии рассматривается более обобщённое понятие для сред с ненулевой зарядовой плотностью – вектор Умова.

Проблема энергии электромагнитного поля в непустом пространстве также освещается в статье [5], где получено общее соотношение для энергии электромагнитного возмущения в среде вне области её прозрачности с учётом временной и пространственной дисперсии. А в работе [6] показано, что проблема импульса электромагнитного поля, создаваемого точечной заряженной частицей, является результатом неправильного применения теоремы Пойнтинга.

Закон сохранения энергии в электродинамике в настоящее время записывается в виде интегральной теоремы Пойнтинга:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F} - \int_V (\mathbf{E}, \mathbf{j}) dV \tag{1}$$

или в дифференциальном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{S} - (\mathbf{E}, \mathbf{j}), \tag{2}$$

где $W = \int_V U dV = \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV$ – полная энергия электромагнитного поля, заключённого в объёме V, $S = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$ – вектор Пойнтинга, $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля, $\mathbf{J}$ – плотность тока, F – поверхность, ограничивающая объём V.

Данная теорема – прямое следствие системы уравнений Максвелла. Далее за вектор Пойнтинга обычно принимают плотность потока электромагнитной энергии, а слагаемое $(\mathbf{E}, \mathbf{j})$ связывают с переходом электромагнитной энергии в другие виды энергии и наоборот. Данная интерпретация вектора Пойнтинга и будет рассматриваться в этой статье.

Прежде всего, следует отметить, что из законов сохранения (1)–(2) вектор Пойнтинга определяется неоднозначно – к нему можно добавить любое соленоидальное поле, так как дивергенция такого поля равна нулю, равно как и поток добавленного поля через любую замкнутую поверхность.

Цель данной работы – сравнить описание потока энергии в непустом пространстве с помощью вектора Пойнтинга и вектора Умова.

Проблема электромагнитного импульса электрона. Принятие вектора Пойнтинга за плотность электромагнитной энергии ведёт к некоторым парадоксам в электродинамике. Наиболее известным из них является проблема электромагнитной массы электрона, называемая также проблемой 4/3 в электродинамике. Приведём здесь рассуждения Фейнмана [4] по данному вопросу (рис. 1).

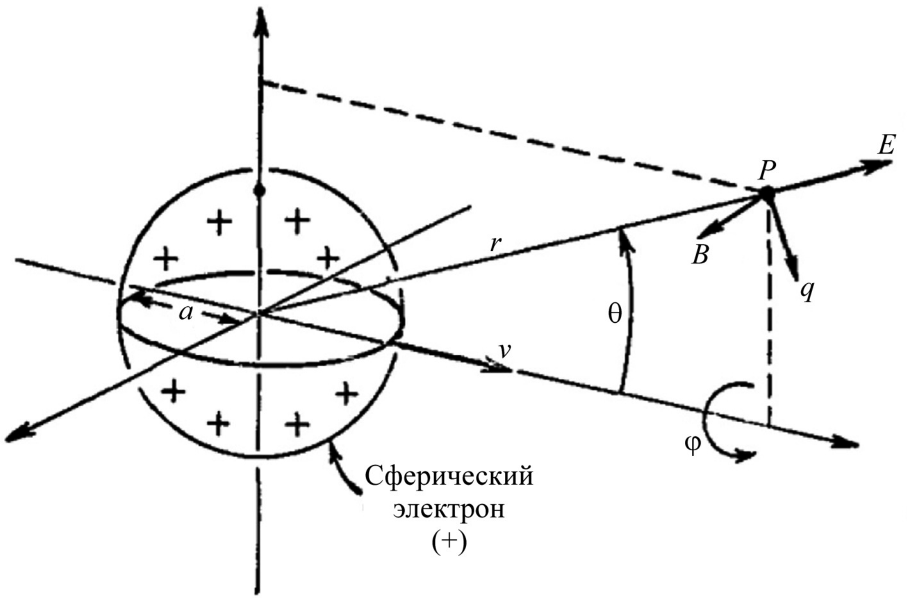

Рис. 1: *Сферический электрон по Фейнману.*

Используя наиболее простую модель электрона (заряженная сфера, радиусом a и полным зарядом q), вычислим полную энергию электрического поля:

$$W = \int \frac{E^2}{8\pi} dV = \int\limits_a^\infty \frac{4\pi r^2 q^2 dr}{8\pi r^4} = \frac{q^2}{2a}. \qquad (3)$$

Эта энергия в соответствии с теорией относительности эквивалентна массе $m = \dfrac{W}{c^2} = \dfrac{q^2}{2ac^2}$, которой и должно обладать поле электрона. Переходя в систему отсчёта, относительно которой электрон движется со скоростью $v \ll c$, находим выражения для электрического и магнитного полей, создаваемых электроном вне сферы:

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{c}. \qquad (4)$$

Тогда плотность потока электромагнитной энергии (равная в данном рассуждении вектору Пойнтинга) выражается как:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E}\times[\mathbf{v}\times\mathbf{E}]\right] = \frac{\mathbf{v}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{v},\mathbf{E})}{4\pi} = \frac{q^2}{4\pi r^6}\left(\mathbf{v}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{v},\mathbf{r})\right). \quad (5)$$

Поскольку произведение количества энергии, прошедшего через единицу площади в единицу времени, на $1/c^2$ равно импульсу в единице объёма пространства, то плотность импульса электромагнитного поля равна $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$. Полный импульс поля, получаемый интегрированием по всему пространству вне сферы, оказывается направленным вдоль скорости электрона (перпендикулярные составляющие при интегрировании в силу симметрии занулятся):

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{g}dV = \frac{4}{3}\frac{q^2}{2ac^2}\mathbf{v} = \frac{4}{3}m\mathbf{v}. \quad (6)$$

Данные расчёты показывают, что электромагнитный импульс электрона в нерелятивистском приближении не равен произведению электромагнитной массы на скорость заряда. Из-за множителя 4/3 проблема и получила своё название. Несоответствие результата с теорией относительности, которая неявно и неизбежно предполагает, что импульс должен быть равен произведению энергии на v/c^2, озадачивает Фейнмана: "По-видимому, мы где-то допустили ошибку. Конечно, не алгебраическую ошибку в наших расчётах, а где-то проглядели что-то существенное".

Для ликвидации этой "неприятной истории" Фейнман вынужден прибегнуть к дополнительным неэлектрическим силам, известным под названием "напряжений Пуанкаре", которые должны сделать теорию самосогласованной за счёт неэлектромагнитной энергии.

Закон сохранения электромагнитной энергии Умова. Совершенно иная интерпретация плотности потока электромагнитной энергии встречается у российского учёного Умова [7], который в 1874 г. на основании закона сохранения энергии, по аналогии с законом непрерывности для электрического заряда, вывел уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{J}, \quad (7)$$

где U – плотность энергии, а $\mathbf{J}$ – плотность потока энергии, которая в случае механически перемещающейся среды может быть записана как $\mathbf{J} = U\mathbf{v}$. А из связи для энергии и импульса следует, что полный импульс такой среды выражается как:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c^2}\int\limits_V \mathbf{J}dV. \quad (8)$$

Данное определение плотности потока отличается от соответствующего определения у Пойнтинга. Однако оно более обоснованно. Рассмотрим стационарную систему электрических зарядов. Энергия этой системы равна энергии электрического поля, создаваемого системой зарядов. При переходе в другую систему отсчёта, относительно которой система движется со скоростью $v \ll c$, плотность потока энергии электромагнитного поля должна представлять собой произведение плотности электрической энергии на скорость движения собственной системы отсчёта (из-за малости скорости энергия магнитного поля, получающегося при преобразовании полей, пренебрежимо мала по сравнению с электрической), что удовлетворительным образом согласуется с определением плотности потока через вектор Умова. Вектор Пойнтинга в такой ситуации даёт парадоксальные результаты. Например, при движении плоского конденсатора перпендикулярно пластинам вектор Пойнтинга равен нулю, хотя энергия, запасённая между обкладками, перемещается вместе с конденсатором. А при движении параллельно пластинам – $\mathbf{S}$ вдвое больше плотности потока электрической энергии.

Вектор Умова 1873 года специалистам следует отличать от распространенного понятия “вектор Умова–Пойнтинга”. Последнее по своему смыслу призвано всегда соответствовать вектору Пойнтинга, выведенному в 1883 году лишь для закона сохранения лучистой электромагнитной энергии (2). Позднее за рубежом вектор Пойнтинга стали подгонять и к движению электромагнитной энергии сред, т.к. теория Умова для первичности движения энергии, а не массы, не приживалась даже в России. Запоздалая попытка россиян подчеркнуть заслуги Умова путем переименования противоречивого вектора Пойнтинга в вектор Умова–Пойнтинга лишь дискредитировала пионерские достижения автора в предрелятивистской механике по переносу переменной внутренней энергии с учетом инерции тепла.

Сравнивая законы сохранения Пойнтинга (2) и Умова (7) в электродинамике, можно утверждать, что вектор Умова $\mathbf{J}$ является более широким понятием, чем вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$, так как включает в себя слагаемое $(\mathbf{E}, \mathbf{j})$. В отсутствие зарядов это слагаемое пропадает и оба вектора становятся равными, что можно наблюдать при рассмотрении электромагнитной волны. Вектора Умова и Пойнтинга совпадают, так как в электромагнитной волне $E = H$, $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$:

$$\mathbf{J} = \left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}\right)\mathbf{v} = \frac{E^2\mathbf{c}}{4\pi}, \tag{9}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{EH\mathbf{c}}{4\pi} = \frac{E^2\mathbf{c}}{4\pi}. \tag{10}$$

Следовательно, при отсутствии зарядов вектор Пойнтинга действительно представляет собой плотность потока электромагнитной энергии, а соответствующий импульс выражается как:

$$|\mathbf{P}| = \frac{1}{c^2}\left|\int\limits_V \mathbf{S}dV\right| = \frac{1}{c}\int\limits_V \left(\frac{E^2}{4\pi}\right)dV = \frac{1}{c}\int\limits_V \left(\frac{E^2}{8\pi}+\frac{H^2}{8\pi}\right)dV = \frac{E}{c}. \tag{11}$$

В случае ненулевой плотности заряда вектор Пойнтинга уже нельзя считать плотностью потока электромагнитной энергии. Здесь необходимо использовать более обобщённое понятие – вектор Умова, что наглядно демонстрирует пример с конденсатором.

Равномерное движение протяжённого электрона. Для более качественного обоснования применения вектора Умова как плотности потока электромагнитной энергии и несостоятельности вектора Пойнтинга в этой роли приведём пример движения и связанного с ним переноса энергии для протяжённого электрона [1]. В собственной системе отсчёта, относительно которой заряд покоится, имеем:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t') = \frac{e\mathbf{r}'}{r'^2(r'+r_0)}, \tag{12}$$

$$\rho'(\mathbf{r}',t') = \frac{\operatorname{div}\mathbf{E}'}{4\pi} = \frac{er_0}{4\pi r'^2(r'+r_0)^2} = \frac{r_0E'^2}{4\pi e}, \tag{13}$$

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}',t') = 0. \tag{14}$$

Применяя преобразования Лоренца [7], переходим к лабораторной системе отсчёта, относительно которой заряд движется со скоростью $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{(\mathbf{r},\mathbf{v})}{c^2}\right), \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + (\gamma-1)\dfrac{(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}. \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = (1-\gamma)\dfrac{\mathbf{v}(\mathbf{v},\mathbf{E}')}{v^2} + \gamma\left(\mathbf{E}' - \dfrac{[\mathbf{v}\times\mathbf{H}']}{c}\right), \\ \mathbf{H} = (1-\gamma)\dfrac{\mathbf{v}(\mathbf{v},\mathbf{H}')}{v^2} + \gamma\left(\mathbf{H}' + \dfrac{[\mathbf{v}\times\mathbf{E}']}{c}\right). \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \rho = \gamma\left(\rho' + \dfrac{(\mathbf{j}',\mathbf{v})}{c^2}\right), \\ \mathbf{j} = \mathbf{j}' + \gamma\mathbf{v}\rho' + (\gamma-1)\dfrac{(\mathbf{j}',\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}, \end{cases} \tag{17}$$

где γ – лоренц-фактор. Проводя соответствующие подстановки (15) в (12)–(14) и (12)–(14) в (16)–(17), находим значение полей и плотностей заряда в лабораторной системе координат:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\gamma e(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}{r'^2(r'+r_0)},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{[\mathbf{v}\times\mathbf{E}]}{c} = \frac{\gamma e[\mathbf{v}\times\mathbf{r}]}{cr'^2(r'+r_0)}, \tag{18}$$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{\gamma e r_0}{4\pi r'^2(r'+r_0)^2},$$

где $r'^2 = \gamma^2\left(\frac{(\mathbf{r},\mathbf{v})}{v} - vt\right)^2 + r^2 - \frac{(\mathbf{r},\mathbf{v})^2}{v^2}$.

А выражая плотность ρ через поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, получаем величину, пропорциональную первому инварианту электромагнитного поля:

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{\gamma r_0}{4\pi e}\left(E^2 - H^2\right). \tag{19}$$

Далее для расчётов введём систему координат таким образом, чтобы скорость собственной для электрона системы координат (штрихованной) относительно лабораторной (нештрихованной) была направлена по оси z (рис. 2).

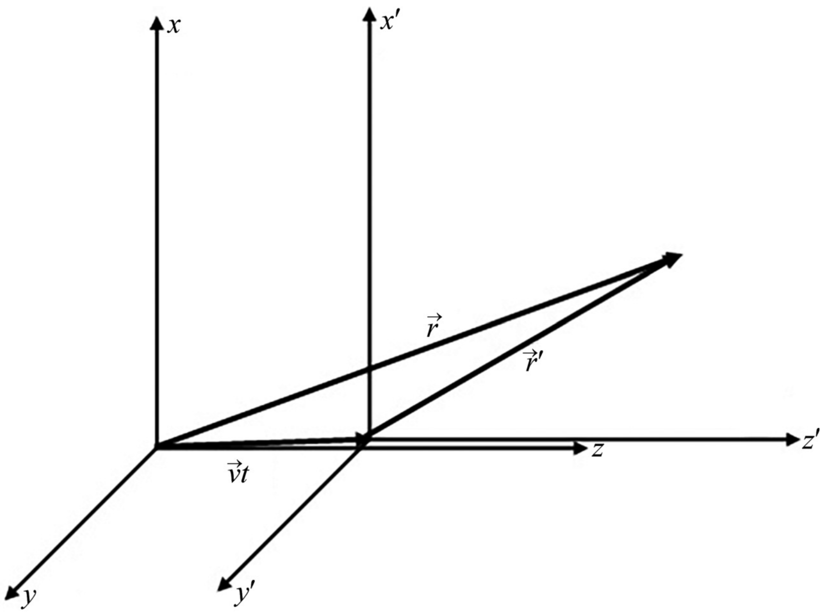

Рис. 2: *Собственная (со штрихом) и лабораторная системы координат.*

Тогда поля и плотность заряда переписываются в виде:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix} \frac{\gamma e}{(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} + r_0\right)}, \tag{20}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\gamma e v}{c\,(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} + r_0\right)}, \tag{21}$$

$$\rho = \frac{\gamma e r_0}{4\pi\,(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} + r_0\right)^2}. \tag{22}$$

А плотность электромагнитной энергии, вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ и Умова $\mathbf{J}$ имеют вид:

$$U = \frac{\gamma^2 e^2 \left(x^2 + y^2 + (z - vt)^2 + \frac{v^2}{c^2}(x^2 + y^2)\right)}{8\pi\,(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^2\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} + r_0\right)^2}, \tag{23}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -x(z - vt) \\ -y(z - vt) \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \frac{\gamma^2 e^2 v}{4\pi\,(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^2\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} + r_0\right)^2}, \tag{24}$$

$$\mathbf{J} = U\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \frac{\gamma^2 e^2 \left(x^2 + y^2 + (z - vt)^2 + \frac{v^2}{c^2}(x^2 + y^2)\right)}{8\pi\,(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^2\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2} + r_0\right)^2}. \tag{25}$$

При движении протяжённого электрона энергия электромагнитного поля движется вместе с ним, т.е. направлена вдоль скорости движения, что согласуется с выражением для вектора Умова, в то время как вектор Пойнтинга имеет составляющие, перпендикулярные движению.

Рассмотрим теперь интегралы от соответствующих векторов Умова и Пойнтинга:

$$\int \mathbf{J} dV = \frac{4\gamma^2 - 1}{6\gamma^2} \frac{\gamma e^2}{r_0} \mathbf{v} = W\mathbf{v}, \tag{26}$$

$$\int \mathbf{S} dV = \frac{2}{3} \frac{\gamma e^2}{r_0} \mathbf{v}. \tag{27}$$

Видим, что в ультрарелятивистском случае ($v \approx c$, $\gamma \gg 1$) интегральные значения векторов Умова и Пойнтинга совпадают:

$$\int \mathbf{J} dV = \frac{4\gamma^2 - 1}{6\gamma^2} \frac{\gamma e^2}{r_0} \mathbf{v} \approx \frac{2}{3} \frac{\gamma e^2}{r_0} \mathbf{v} = \int \mathbf{S} dV. \tag{28}$$

А в случае малых скоростей ($v \ll c$, $\gamma \approx 1$) отличаются на уже обсуждавшийся коэффициент 4/3:

$$\int \mathbf{J} dV = \frac{4\gamma^2 - 1}{6\gamma^2} \frac{\gamma e^2}{r_0} \mathbf{v} \approx \frac{1}{2} \frac{\gamma e^2}{r_0} \mathbf{v} = \frac{3}{4} \int \mathbf{S} dV. \tag{29}$$

При интегрировании вектора Пойнтинга перпендикулярные составляющие зануляются, но в пределе малых скоростей его интегральное значение не соответствует полному потоку энергии, равному в точности интегральному значению вектора Умова. В ультрарелятивистском случае распределение полей становится похожим на распределение в электромагнитной волне ($E_\parallel \approx 0$, $E_\perp \approx E$, $E \approx H$, $\mathbf{v} \approx \mathbf{c}$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$), поэтому вектор Пойнтинга даёт правильное значение.

Произведя более детальный анализ для дивергенций векторов Умова и Пойнтинга, мы получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \mathbf{S} + (\mathbf{E}, \mathbf{j}) = -\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{30}$$

Видим, что при описании закона сохранения электромагнитной энергии вектор Пойнтинга не учитывает слагаемое $(\mathbf{E}, \mathbf{j})$, связанное с движением зарядовой плотности

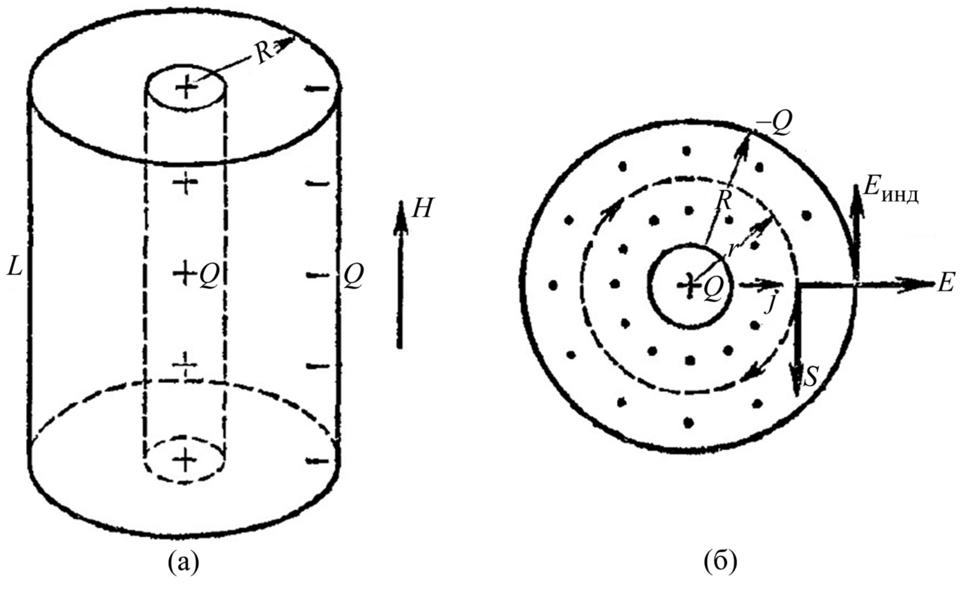

Рис. 3: *Цилиндрический конденсатор.*

в электрическом поле, в то время как вектор Умова учитывает это слагаемое. При интерпретации закона сохранения в форме Пойнтинга (2) это слагаемое связывают с переходом электромагнитной энергии в другие виды энергии, но, как мы убедились на примере движения протяжённого электрона, никаких переходов электромагнитной энергии в другие виды здесь нет. Следовательно, слагаемое $(\mathbf{E}, \mathbf{j})$ должно учитываться при подсчёте плотности потока электромагнитной энергии, что и выполняется для вектора Умова.

Вывод. Применение вектора Пойнтинга в качестве плотности потока энергии является обоснованным только для электромагнитной волны. В случае ненулевой плотности заряда применение вектора Пойнтинга приводит к парадоксальным результатам, не согласующимся с реальным переносом энергии электромагнитного поля. Таким образом, вектор Пойнтинга является лишь частным случаем вектора Умова при отсутствии зарядов. Последний представляет собой реальную плотность потока электромагнитной энергии, так как учитывает переносимую зарядами энергию.

Следует отметить, что использование вектора Умова не отвергает все результаты применения вектора Пойнтинга, а последовательно дополняет их в тех случаях, где существенную роль играет пространственное перемещение зарядов. В схеме цилиндрического конденсатора, помещённого в магнитное поле, линии которого направлены вдоль оси (рис. 3), показано, что вектор Пойнтинга циркулирует вокруг оси, создавая таким образом в статическом поле ненулевой момент импульса, который при выключении магнитного поля полностью переходит в механический [8, с. 367]. Рассматривая эту задачу с точки зрения вектора Умова, можно прийти к выводу, что такой циркуляции нет. Однако в данном случае мы обязаны направить вектор Умова также вокруг оси, чтобы ЭМ энергия циркулировала по кругу, аналогично вектору Пойнтинга – интегральный и дифференциальный законы сохранения энергии Умова при этом будут также выполняться, так как дивергенция такого распределения равна нулю (энергия течёт подобно несжимаемой жидкости), как и поток через любую замкнутую поверхность.

Применение вектора Умова для рассмотрения плотности потоков электромагнитной энергии разрешает многие проблемы, порождённые применением вектора Пойнтинга для этой роли. А поскольку вектор Пойнтинга является частным случаем вектора Умова (т.е. понятие “вектор Умова” является более обобщённым), то использование последнего не должно нарушать согласующиеся с экспериментом результаты вектора Пойнтинга.

Автор благодарен научному руководителю в аспирантуре И. Э. Булыженкову за постановку задачи и за помощь в написании статьи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 2. Теория поля* (М., Наука, 1988), с. 512.

[2] I. E. Bulyzhenkov–Widicker, Int. J. Theor. Phys. **47**, 1261 (2008); https://doi.org/10.1007/s10773-007-9559-z.

[3] И. Э. Булыженков, Краткие сообщения по физике ФИАН **41**(1), 3 (2014).

[4] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, *Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика* (М., Мир, 1965), с. 282.

[5] А. Г. Загородний, С. А. Тригер, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(5), 45 (2018).

[6] A. L. Kholmetskii, O. Missevitch, and Tolga Yarman, Canadian Journal of Physics **93**(6), 691 (2015), https://doi.org/10.1139/cjp-2014-0533.

[7] Н. А. Умов, *Уравнения движения энергии в телах* (Одесса, Типогр. Ульриха и Шульце, 1874), с. 56.

[8] Д. В. Сивухин, *Общий курс физики. Том 3. Электричество* (М., Наука, 1977), с. 704.

Поступила в редакцию 16 сентября 2019 г.

После переработки 13 января 2020 г.

Принята к публикации 14 января 2020 г.