УДК 539.184

ПОПРАВКИ НА СТРУКТУРУ ЯДРА В СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЕ P-СОСТОЯНИЙ ЛЕГКИХ МЮОННЫХ ИОНОВ

А. П. Мартыненко, Ф. А. Мартыненко, О. С. Сухорукова

Проведен расчет вклада двухфотонных обменных амплитуд в сверхтонкую структуру спектра P-состояний в мюонных ионах лития, бериллия и бора, обусловленного структурой ядра. Для построения оператора взаимодействия частиц в импульсном пространстве использован метод проекционных операторов на состояния с определенными значениями полного момента атома F и мюона J. Поправки на структуру ядра выражены в терминах электромагнитных формфакторов ядер и зарядовых радиусов ядер.

Ключевые слова: мюонные ионы, квантовая электродинамика, сверхтонкая структура.

Квантовая электродинамика связанных состояний представляет собой наиболее успешную теорию современной физики, которая проверена с помощью очень точных экспериментов для многих атомов и молекул. За последнее десятилетие коллаборация CREMA (Charge Radius Experiments with Muonic Atoms) осуществила ряд экспериментов с мюонным водородом и ионами мюонного гелия, которые привели к возникновению проблемы зарядового радиуса протона [1]. Одно из будущих научных направлений коллаборации CREMA связано с изучением спектров энергии легких мюонных ионов лития, бериллия и бора методами лазерной спектроскопии. Данные эксперименты позволят получить новые величины зарядовых радиусов ядер этих ионов. Основная теоретическая проблема, которую приходится решать при выполнении прецизионных расчетов различных энергетических уровней, связана с построением оператора взаимодействия частиц с учетом таких вкладов в оператор взаимодействия, которые могут давать значительные численные поправки в спектре энергии. В наших недавних работах [2–4] мы выполнили исследования как сверхтонкой структуры (СТС) спектра

Самарский университет, 443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34; f.a.martynenko@gmail.com, o.skhrkv@gmail.com.

энергии, так и лэмбовского сдвига для мюонных ионов лития, бериллия и бора с учетом различных поправок в рамках квазипотенциального метода. Цель данной работы состоит в изучении специального дополнительного вклада структуры ядра из двухфотонных обменных амплитуд в сверхтонком расщеплении P-уровней энергии. Данный вклад имеет важное значение для достижения высокой точности расчета частот перехода между уровнями $2S$ и $2P$.

Ядра лития, бериллия и бора имеют изотопы со спином $s_2 = 3/2$. Сверхтонкая структура таких мюонных ионов состоит из 6 состояний: $2^3P_{1/2}$, $2^5P_{1/2}$, $2^1P_{3/2}$, $2^3P_{3/2}$, $2^5P_{3/2}$, $2^7P_{3/2}$, где нижний индекс обозначает полный момент мюона $\mathbf{J} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{L}$, а верхний индекс фактор $(2F+1)(\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{s}_2)$ [4]. Для расчета вклада двухфотонных амплитуд в оператор взаимодействия мюона и ядра мы используем импульсное представление. Вклад в спектр энергии определяется в первом порядке теории возмущений следующим интегралом:

$$\Delta E^{hfs} = \int (\varepsilon^* \cdot n_q) R_{21}(q) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} \int (\varepsilon \cdot n_p) R_{21}(p) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \Delta V^{hfs}(\mathbf{p},\mathbf{q}), \tag{1}$$

где волновая функция $2P$-состояния представлена в тензорной форме, ε_σ – вектор поляризации орбитального движения, $n_p = (0, \mathbf{p}/p)$, $R_{21}(p)$ – радиальная волновая функция в импульсном представлении. Сверхтонкая часть потенциала может быть построена по амплитуде двухфотонного взаимодействия $T_{2\gamma}$ с помощью метода проекционных операторов на состояния частиц с определенными квантовыми числами [2–4]. Такие проекционные операторы могут быть построены в терминах волновых функций частиц в системе покоя в ковариантной форме. Их введение позволяет избежать прямого перемножения различных дираковских факторов в амплитуде взаимодействия и использовать компьютерные методы расчета амплитуд. При построении потенциала взаимодействия частиц мы используем две схемы сложения моментов: 1. $\mathbf{J} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{L}$, $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{s}_2$, 2. $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + s_2$, $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$. Учитывая, что ядра спина 3/2 описываются в формализме Рарита–Швингера спин-вектором $v_\alpha(p)$, мы можем записать потенциал от суммы прямой и перекрестной двухфотонных амплитуд взаимодействия в виде:

$$V_{2\gamma}(p,q) = \frac{(Z\alpha)^2}{16\pi m_1^2 m_2^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} [\bar{u}(0)(m_1\hat{v} + \hat{q} + m_1)\gamma_\mu(m_1\hat{v} + \hat{k} + m_1)\gamma_\nu(m_1\hat{v} + \hat{p} + m_1)u(0)] \tag{2}$$

$$\frac{(\varepsilon^* \cdot n_q)}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} [\hat{v}_\alpha(0)(m_2\hat{v} - \hat{p} - m_2)\Gamma^\nu_{\alpha\gamma}(\hat{k} - m_2\hat{v} + m_2)\hat{\Pi}_{\gamma\omega}\Gamma^\mu_{\omega\beta}(m_2\hat{v} - \hat{q} - m_2)v_\beta(0)] \frac{(\varepsilon \cdot n_p)}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2},$$

где 4-импульсы начальных и конечных частиц $p_{1,2} = \dfrac{m_{1,2}}{(m_1+m_2)} P \pm p$, $q_{1,2} =$

$\frac{m_{1,2}}{(m_1+m_2)}P \pm q$ выражены через полный $P=(m_1+m_2)v$ и относительные 4-импульсы p, q,

$$\hat{\Pi}_{\gamma\omega}(p) = g_{\gamma\omega} - \frac{1}{3}\gamma_\gamma\gamma_\omega - \frac{2p_\gamma p_\omega}{3m_2^2} - \frac{\gamma_\gamma p_\omega - \gamma_\omega p_\gamma}{3m_2}, \qquad (3)$$

$$\Gamma^\nu_{\alpha\gamma}((p-k)^2) = [g_{\alpha\gamma}\frac{(k-2m_2v)_\nu}{2m_2}F_1((p-k)^2) + g_{\alpha\gamma}\sigma_{\nu\lambda}\frac{(p-k)^\lambda}{2m_2}F_2((p-k)^2) + \qquad (4)$$

$$+\frac{(p-k)_\alpha(p-k)_\gamma}{4m_2^2}\frac{(k-2m_2v)_\nu}{2m_2}F_3((p-k)^2) + \frac{(p-k)_\alpha(p-k)_\gamma}{4m_2^2}\sigma_{\nu\lambda}\frac{(p-k)^\lambda}{2m_2}F_4((p-k)^2)].$$

Четыре формфактора F_i в (4) могут быть выражены через мультипольные формфакторы, измеряемые в экспериментах: зарядовый G_{E0}, электрический квадрупольный G_{E2}, магнитный дипольный G_{M1} и магнитный октупольный G_{M3} [2–4]. Для расчета сверхтонкой структуры $2P_{1/2}$ состояния мы вводим вначале проекционный оператор, на состояние мюона с моментом $j=1/2$:

$$\hat{\Pi}_{j=1/2} = [u(0)\varepsilon_\omega(0)]_{j=1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_5(\gamma_\omega - v_\omega)\psi(0), \qquad (5)$$

где $\psi(0)$ – дираковский спинор, описывающий мюон с моментом $j=1/2$. На следующем шаге мы проектируем пару мюон-ядро на состояния с полным моментом $F=2$ или $F=1$. В случае состояния с $F=2$ проекционный оператор имеет вид:

$$\hat{\Pi}_{j=1/2}(F=2) = [\psi(0)\bar{v}_\alpha(0)]_{F=2} = \frac{1+\hat{v}}{2\sqrt{2}}\gamma_\tau\varepsilon_{\alpha\tau}, \qquad (6)$$

где тензор $\varepsilon_{\alpha\tau}$ описывает состояние с $F=2$. Для построения оператора взаимодействия частиц в этом состоянии проводится суммирование по проекциям полного момента F с помощью формулы

$$\sum_{M_F=-2}^{2}\varepsilon^*_{\beta\lambda}\varepsilon_{\alpha\rho} = \hat{\Pi}_{\beta\lambda,\alpha\rho} = \left[\frac{1}{2}X_{\beta\alpha}X_{\lambda\rho} + \frac{1}{2}X_{\beta\rho}X_{\lambda\alpha} - \frac{1}{3}X_{\beta\lambda}X_{\alpha\rho}\right],\ X_{\beta\alpha} = (g_{\alpha\beta} - v_\beta v_\alpha). \qquad (7)$$

В результате оператор взаимодействия частиц в состоянии $2^5P_{1/2}$ примет вид:

$$V_{2\gamma}(\mathbf{p},\mathbf{q})^{j=1/2}_{F=2} = \frac{(Z\alpha)^2}{4\pi^2 m_2}\int\frac{d\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\{F_1((\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_3((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)\left[-\frac{m_1}{3m_2}(\mathbf{pq})\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\right] + \qquad (8)$$

$$+F_1((\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_2((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)\left[\frac{4}{3}(\mathbf{pk})\frac{q}{p} + \frac{4}{3}(\mathbf{qk})\frac{p}{q} + \frac{2m_1}{3m_2}(\mathbf{pk})\frac{q}{p} + \frac{2m_1}{3m_2}(\mathbf{qk})\frac{p}{q} + \right.$$

$$+(\mathbf{pq})\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\Bigg]-F_1((\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_1((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)\Bigg[2(\mathbf{pk})\frac{q}{p}+2(\mathbf{qk})\frac{p}{q}+\frac{m_2}{m_1}(\mathbf{pk})\frac{q}{p}+\frac{m_2}{m_1}(\mathbf{qk})\frac{p}{q}+$$

$$+\frac{m_1}{3m_2}(\mathbf{pk})\frac{q}{p}+\frac{m_1}{3m_2}(\mathbf{qk})\frac{p}{q}+(\mathbf{pq})\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)+4m_1m_2\frac{(\mathbf{pq})}{pq}\Bigg].$$

Это выражение ясно показывает общую структуру потенциалов, которые мы получаем на выходе из программы аналитических расчётов Form [5]. Полезно заметить, что при построении потенциалов таким способом мы получаем не только сверхтонкую часть потенциала, но и вклад кулоновского взаимодействия в тонкую структуру, который сокращается при переходе к сверхтонким расщеплениям. Рассмотрим построение потенциала взаимодействия частиц в состоянии $2^3P_{1/2}$. Чтобы ввести проекционные операторы на состояние с $F=1, j=1/2$, необходимо сложить спин ядра $s_2=3/2$ и полный момент мюона $j=1/2$. Для этого мы используем преобразование базиса вида:

$$\Psi_{s_2=3/2,F=1,M_F}=\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_{\tilde S=0,F=1,M_F}+\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_{\tilde S=1,F=1,M_F}, \tag{9}$$

где состояние с $s_2=3/2$ представляется в виде суммы двух моментов $\tilde s_2=1/2$ и $l_2=1, \tilde S=s_1+\tilde s_2$. В дальнейшем при работе с состояниями $\Psi_{\tilde S=0,F=1,M_F}$ и $\Psi_{\tilde S=1,F=1,M_F}$ мы вводим проекционные операторы на эти состояния, вид которых хорошо известен:

$$\hat\Pi_\alpha(\tilde S=0,F=1)=\frac{1+\hat v}{2\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon_\alpha,\ \hat\Pi_\alpha(\tilde S=1,F=1)=\frac{1+\hat v}{4}\gamma_\sigma\varepsilon_{\alpha\sigma\rho\omega}v^\rho\varepsilon^\omega, \tag{10}$$

где вектор поляризации ε^ω описывает состояние с полным моментом $F=1$. При использовании проекционных операторов (10) возникают несколько вкладов в потенциал, сумма которых имеет вид:

$$V_{2\gamma}(\mathbf{p},\mathbf{q})^{j=1/2}_{F=1}=\frac{(Z\alpha)^2}{4\pi^2m_2}\int\frac{d\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\{F_1((\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_3((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)\left[\frac{m_1}{3m_2}(\mathbf{pq})\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\right]+ \tag{11}$$

$$+F_1((\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_2((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)\Bigg[\frac{20}{9}(\mathbf{pk})\frac{q}{p}+\frac{20}{9}(\mathbf{qk})\frac{p}{q}+\frac{10m_1}{9m_2}(\mathbf{pk})\frac{q}{p}+\frac{10m_1}{9m_2}(\mathbf{qk})\frac{p}{q}-$$

$$-\frac{10}{9}(\mathbf{pq})\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)-(\mathbf{pq})\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\Bigg]+F_1(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_1(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)\Bigg[2(\mathbf{pk})\frac{q}{p}+2(\mathbf{qk})\frac{p}{q}+$$

$$+\frac{m_2}{m_1}(\mathbf{pk})\frac{q}{p}+\frac{m_2}{m_1}(\mathbf{qk})\frac{p}{q}-\frac{5m_1}{9m_2}(\mathbf{pk})\frac{q}{p}-\frac{5m_1}{9m_2}(\mathbf{qk})\frac{p}{q}+(\mathbf{pq})\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)+4m_1m_2\frac{(\mathbf{pq})}{pq}\Bigg].$$

Чтобы выделить вклад, обусловленный структурой ядра, ядра в аналитическом виде, разложим формфакторы F_i в ряд, сохранив члены, пропорциональные зарядовому и магнитному радиусам r_E^2, r_M^2. При этом учтем, что интегральные функции в (8), (11) симметричны относительно замены $p \leftrightarrow q$ и представим произведение формфакторов в виде:

$$F_1((\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_1((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2) \approx 1 - \frac{1}{3}r_E^2(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2, \tag{12}$$

$$F_1((\mathbf{k}-\mathbf{p})^2)F_2((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2) \approx G_{M1}(0)\left[1 - \frac{1}{6}(r_E^2 + r_M^2)(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2\right].$$

Вычисляя далее импульсные интегралы, получим вклад в расщепление уровня $2P_{1/2}$:

$$\Delta E^{hfs}(2^5P_{1/2} - 2^3P_{1/2}) = \frac{Z^5\alpha^6\mu^4\mu_N}{27m_p}\left[(r_E^2 + r_M^2)\left(2 + \frac{m_1}{m_2}\right) - \frac{m_1}{m_2G_{M1}(0)}r_E^2\right]. \tag{13}$$

Построение оператора взаимодействия частиц в других состояниях $2^{(2F+1)}P_{3/2}$ и вычисление вкладов в сверхтонкую структуру проводится аналогично [2–4].

В данной работе исследовался дополнительный, ранее не учтённый тип поправок в СТС спектра P-состояний легких мюонных ионов, обусловленный структурой ядра. В результате были получены следующие численные значения вкладов структуры ядра для расщеплений $2P$-состояния: $\Delta E^{hfs}(2^5P_{1/2} - 2^3P_{1/2}) = 0.095$ meV (Li), –0.560 meV (Be), 3.579 meV (B); $\Delta E^{hfs}(2^7P_{3/2} - 2^5P_{3/2}) = 0.029$ meV (Li), –0.169 meV (Be), 1.083 meV (B); $\Delta E^{hfs}(2^5P_{3/2} - 2^3P_{3/2}) = 0.007$ meV (Li), –0.043 meV (Be), 0.269 meV (B); $\Delta E^{hfs}(2^3P_{3/2}) = 0.022$ meV (Li), –0.128 meV (Be), 0.810 meV (B). Эти значения необходимо учитывать при получении полных сверхтонких расщеплений уровней энергии $2^{(2F+1)}P_J$.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант РНФ 18-12-00128) и фонда развития теоретической физики и математики Базис (грант №19-1-5-67-1) (Ф.А.М.).

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Pohl, J. Phys. Soc. Jpn. **85**, 091003-1 (2016). DOI: 10.7566/JPSJ.85.091003.

[2] A. A. Krutov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, and O. S. Sukhorukova, Phys. Rev. A **94**(6), 062505-1 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.94.062505.

[3] A. E. Dorokhov, A. A. Krutov, A. P. Martynenko, et al., Phys. Rev. A **98**(4), 042501- (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.042501.

[4] A. E. Dorokhov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, and O. S. Sukhorukova, Phys. Rev. A **100**(6), 062513-1 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.100.062513.

[5] J. A. M. Vermaseren, New features of FORM. e-preprint arXiv:math-ph/0010025. https://arxiv.org/pdf/math-ph/0010025.pdf.

Поступила в редакцию 10 января 2020 г.
После доработки 18 февраля 2020 г.
Принята к публикации 16 марта 2020 г.

Публикуется по рекомендации XVII Всероссийского молодежного Самарского конкурса-конференции научных работ по оптике и лазерной физике (Самара).