

## ПЫЛЕ-АКУСТИЧЕСКИЙ СОЛИТОН В ПЛАЗМЕ С РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Д. Н. Габышев<sup>1</sup>, А. А. Рухадзе<sup>2,3</sup>

*Рассматривается одномерный нерелятивистский пыле-акустический солитон в модели плазмы с холодной положительно заряженной пылью, тёплыми ионами и релятивистскими тепловыми электронами (с учётом захвата последних). Показано влияние увеличения электронной температуры.*

**Ключевые слова:** неизотермическая плазма, пыле-акустический солитон, распределение Максвелла–Ютгнера.

Теория пыле-акустических солитонов возникла в конце минувшего века на основе хорошо развитой к тому времени теории ионно-звуковых солитонов [1, 2]. Кратность заряда пылевых частиц велика  $Z_d \gg 1$ . Условие квазинейтральности такой плазмы:  $n_e - n_i - Z_d n_d = 0$ , где  $n$  – концентрация, а индексы  $e, i, d$  относятся, соответственно, к электронам, ионам и пылевым частицам, при этом  $n_e, n_i \gg n_d$ . Пусть фактор Лоренца  $\gamma$  солитона близок к единице. Применима одномерная система гидродинамических уравнений, дополненная уравнением Пуассона:

$$\partial_t n_d + \partial_x (n_d v_d) = 0, \quad \partial_t v_d + v_d \partial_x v_d = -(Z_d e / M_d) \partial_x \varphi,$$

$$\partial_x^2 \varphi = -4\pi e (n_e - n_i - Z_d n_d),$$

$$N_e = \frac{n_e}{n_{0e}} = \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) = \exp\left(\frac{\Phi}{\delta_e + \beta\delta_i}\right),$$

$$N_i = \frac{n_i}{n_{0i}} = \exp\left(-\frac{e\varphi}{T_i}\right) = \exp\left(-\frac{\Phi\beta}{\delta_e + \beta\delta_i}\right),$$

<sup>1</sup> Тюменский государственный университет, 625003 Россия, Тюмень, ул. Володарского, 6; e-mail: d.n.gabyshev@utmn.ru, gabyshev-dmitrij@rambler.ru.

<sup>2</sup> ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38.

<sup>3</sup> Московский физико-технический институт (Государственный университет), МФТИ, 141700 Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

где  $\varphi$  – электростатический потенциал,  $v$  и  $M$  – скорость вдоль по  $x$  и масса частиц, соответствующих индексу,  $T$  – температура ( $T_e \gg T_i$ ). Плазма однократно ионизована: заряд ионов равен  $e$ , а заряд электронов  $-e$ . Выше нами использованы удобные обозначения из [3]:

$$\beta = \frac{T_e}{T_i}, \quad \delta_e = \frac{n_{0e}}{Z_d n_{0d}}, \quad \delta_i = \frac{n_{0i}}{Z_d n_{0d}},$$

$$\Phi = \frac{Z_d e \varphi}{M_d C_d^2}, \quad C_d^2 = \frac{Z_d^2 n_{0d} T_e T_i}{M_d (n_{0e} T_i + n_{0i} T_e)}.$$

С помощью автомодельной переменной  $\xi = x - ut$  перейдем в систему, движущуюся с некоторой скоростью  $u = \text{const}$  (это и есть скорость солитона). Условие холодной пылевой компоненты:  $v_d = 0$  и  $n_d = n_{0d}$  при  $\varphi = 0$ . Откуда:

$$N_d = \frac{n_d}{n_{0d}} = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2 \frac{Z_d e \varphi}{M_d}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\Phi}{q^2}}}, \quad (1)$$

где  $q = u/C_d$  – число Маха,  $C_d$  – пыле-акустическая скорость.

Нормируем  $\xi$  на дебаевский радиус  $r_D^2 = \varepsilon_0 M_d C_d^2 / e^2 Z_d^2 n_{0d}$ , перейдя к переменной  $\eta = \xi / r_D$ . Уравнение Пуассона из начальной системы примет вид:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} = \delta_e N_e - \delta_i N_i - N_d. \quad (2)$$

Правая часть уравнения (2) приводится к квадратичному виду в [2] и к кубическому в [1]. Как и в [4], нас интересует только сильно нелинейный случай. Поскольку потенциал  $\Phi$  положителен, он представляет собой яму для электронов, которая захватывает наименее энергичные электроны, и их актуальная концентрация уменьшается на долю  $\Delta N_e$ . Для релятивистских электронов в силовом поле справедливо распределение Максвелла–Больцмана–Юттнера [4–7]:

$$f_{MBJ}(p) = \frac{n_{0e}}{4\pi (mc)^3 \theta K_2(1/\theta)} \exp \left[ \frac{\Phi}{\delta_e + \beta \delta_i} - \frac{1}{\theta} \sqrt{1 + (p/mc)^2} \right],$$

где  $K_2$  – модифицированная функция Бесселя 2-го рода (функция Макдональда),  $\theta = T_e / m_e c^2$  – электронная температура. Доля захваченных электронов:

$$\delta_e \Delta N_e = \delta_e \frac{1}{n_{0e}} \int_0^{p_{\max}} f_{MBJ}(p) 4\pi p^2 dp.$$

Захватываются только медленные электроны с кинетической энергией в пределах  $0 \leq E_{\text{kin}} \leq e\varphi$ . Поэтому получаем [4]:

$$\delta_e \Delta N_e = \delta_e \frac{\theta^2}{K_2(1/\theta)} \exp\left(\frac{\Phi}{\delta_e + \beta\delta_i}\right) \int_{\frac{1}{\theta}}^{\frac{\Phi}{\delta_e + \beta\delta_i} + \frac{1}{\theta}} z \sqrt{z^2 - \frac{1}{\theta^2}} \exp(-z) dz. \quad (3)$$

Учитывая, что  $\Phi(0) = \Phi_{\text{max}}$ , интегрируем (2) с поправкой (3) один раз:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\eta}\right)^2 = q^2 \left( \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{q^2}} - \sqrt{1 - \frac{2\Phi_{\text{max}}}{q^2}} \right) + \int_{\Phi_{\text{max}}}^{\Phi} [\delta_e(N_e - \Delta N_e) - \delta_i N_i] d\Phi. \quad (4)$$

Для уединённой волны решение для (2), (4) ограничено:  $d\Phi/d\eta = 0$  и  $\Phi = 0$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Исходя из этого, из (4) получаем выражение для числа Маха:

$$q^2 = -\frac{1}{2} \frac{\left\{ \int_{\Phi_{\text{max}}}^0 [\delta_e(N_e - \Delta N_e) - \delta_i N_i] d\Phi \right\}^2}{\Phi_{\text{max}} + \int_{\Phi_{\text{max}}}^0 [\delta_e(N_e - \Delta N_e) - \delta_i N_i] d\Phi}.$$

Когда амплитуда и число Маха пыле-акустического солитона достигают критических значений, знаменатель в (1) обращается в нуль:  $\Phi_{\text{cr}} = q_{\text{cr}}^2/2$ . Очевидно, они зависят от температуры  $\theta$  (рис. 1), как и для простого ионно-звукового солитона [4]. Пусть  $\theta$  меняется, а остальные параметры плазмы для оценок возьмём близкими к [3]:  $Z_d = 10^4$ ,  $n_{0e} = 6 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$ ,  $n_{0d} = 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$ , ионная температура  $T_i$  соответствует значению 300 К,  $M_d = 5 \cdot 10^{-14} \text{ кг}$ . Для иллюстрации солитона выберем параметры (рис. 2–4): числа Маха  $q$ , ширину на полувисоте  $D$  и площадь под графиком  $S$  в зависимости от амплитудного значения  $\Phi_{\text{max}}$ .

Анализ графиков и решения показывает, что пыле-акустический солитон может иметь  $q \gg 1$ . Даже при этом его скорость  $u$  остаётся сравнительно малой из-за малости скорости пыле-акустической  $C_d$ , так что исходное допущение о близости фактора Лоренца  $\gamma$  к единице выполняется, а исходная система уравнений применима. Захваченные электроны существенно влияют на характеристики солитона. При этом они ведут себя совершенно иначе, чем для ионно-звукового солитона [4]. В частности, критическое число Маха растёт с повышением электронной температуры, в то время как в непылевой плазме с релятивистскими электронами наблюдается обратная зависимость. Существенная разница заключается также в том, что эффективная ширина

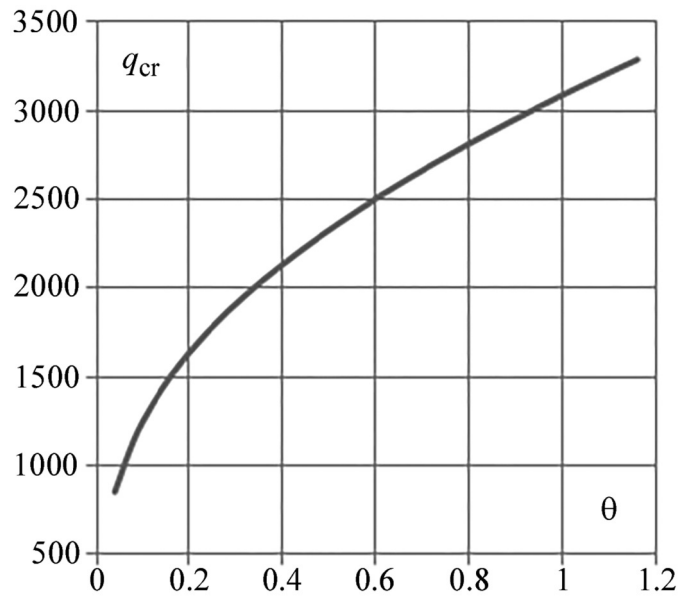


Рис. 1: Критическое число Маха.

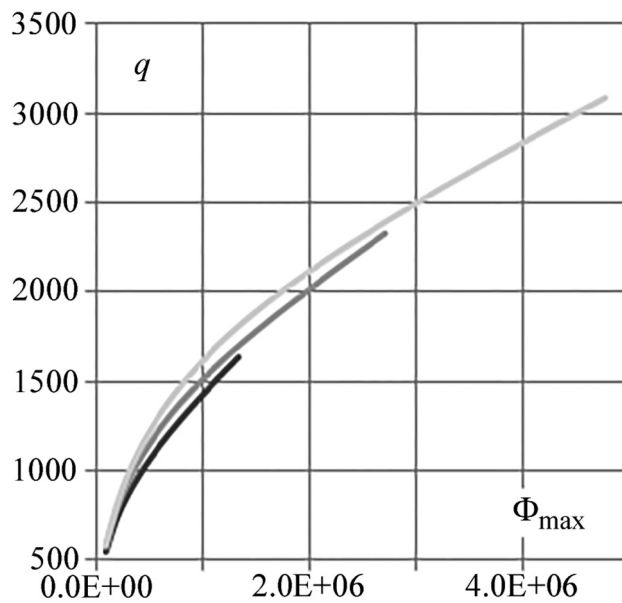


Рис. 2: Связь числа Маха и амплитуды, от тёмного к светлому:  $\theta = 0.2, 0.5, 1.0$ .

пыле-акустического солитона не монотонно зависит от его амплитуды. А именно существует некая максимальная ширина (экстремум) при определённом значении амплитуды. Площадь под кривой обезразмеренного графика увеличивается с ростом температуры, хотя эффект для ионно-звукового солитона был противоположным. В целом,

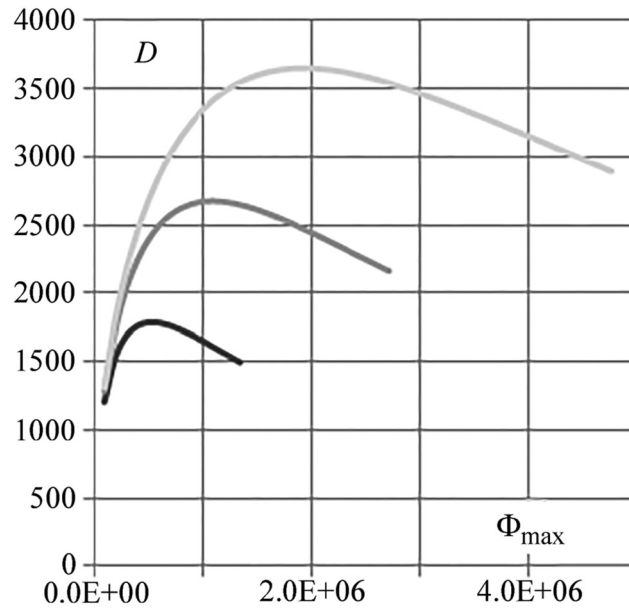


Рис. 3: Связь ширины с амплитудой, от тёмного к светлому:  $\theta = 0.2, 0.5, 1.0$ .

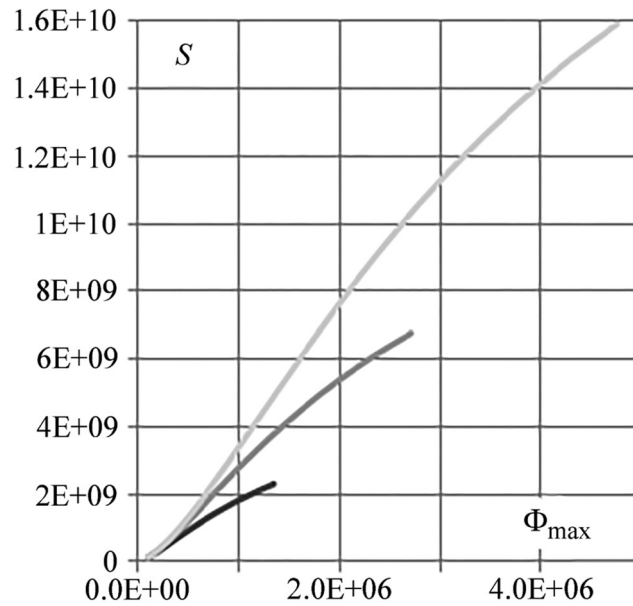


Рис. 4: Площадь под графиком от амплитуды, от тёмного к светлому:  $\theta = 0.2, 0.5, 1.0$ .

всё это показывает, что простая аналогия между пыле-акустическим и ионно-звуковым солитоном с релятивистскими электронами далеко не всегда уместна. Влияние темпе-

ратуры на заряд пылинок не учитывалось, потому как это усложнило бы картину, а решение, очевидно, изменилось бы лишь количественно.

Исследование было выполнено при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-819.2020.2).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] N. N. Rao et al., *Planet. Space Sci.* **38**(4), 543 (1990). DOI: 10.1016/0032-0633(90)90147-I.
- [2] J. X. Ma, J. Liu, *Phys. Plasmas* **4**(2), 253 (1997). DOI: 10.1063/1.872086.
- [3] О. Ф. Петров и др., *ЖЭТФ* **153**(6), 1012 (2018). DOI: 10.7868/S0044451018060160.
- [4] Д. Н. Габышев, А. А. Рухадзе, *Краткие сообщения по физике ФИАН* **44**(1), 9 (2017). DOI: 10.3103/S1068335617010055.
- [5] F. Jüttner, *Ann. Phys.* **339**(5), 856 (1911). DOI: 10.1002/andp.19113390503.
- [6] F. Jüttner, *Ann. Phys.* **340**(6), 145 (1911). DOI: 10.1002/andp.19113400608.
- [7] R. C. Tautz, *Astrophys. Space Sci.* **330**, 69 (2010). DOI: 10.1007/s10509-010-0351-9.

Поступила в редакцию 26 марта 2020 г.

После доработки 23 апреля 2020 г.

Принята к публикации 24 апреля 2020 г.