УДК 519.676

ВЕСОВЫЕ МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СХЕМ СОВПАДЕНИЙ

Е. А. Цветков

На этапе проектирования приборов, работающих по методу меченных нейтронов, или детекторов космического излучения, включающих схемы совпадений, используются методы Монте-Карло. Весовые методы позволяют существенно ускорить расчеты, проводимые методом Монте-Карло. В настоящей работе предложен весовой подход для оценки отклика схем совпадений с использованием методов Монте-Карло, учитывающий ложные совпадения, вызванные частицами из разных ветвящихся траекторий. Рассматриваются методы существенной выборки, русской рулетки и метод расщепления. Предлагаемая оценка имеет вид суммы откликов детектора по всем возможным комбинациям альтернативных реализаций траекторий. Статистический вес комбинации вычисляется как произведение весов траекторий. Доказана несмещенность оценки. Если схема совпадений не сильно нагружена, предложенная оценка может быть упрощена, что позволит уменьшить количество рассматриваемых комбинаций.

Ключевые слова: схемы совпадений, метод Монте-Карло, весовые методы, расщепление траекторий, метод меченных нейтронов.

Введение. Схемы совпадений нашли свое применение в задачах гамма-астрономии, обеспечения безопасности, медицины и в других сферах деятельности. В задачах безопасности нашли своё применение приборы, работающие по методу меченых нейтронов (ММН), позволяющие проводить досмотр грузов и контейнеров.

В ММН инспектируемый объём облучается нейтронами с энергиями около 14 МэВ, неупругое рассеяние которых порождает вторичное гамма-излучение. По измерениям

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: tsvetkov_egor@mail.ru.

его амплитудно-временного спектра можно идентифицировать вещество, находящееся в инспектируемом объёме. Нейтроны рождаются в реакции $d + t \rightarrow \alpha + n$, причём конус возможных направлений вылета нейтрона вычисляется через направление вылета α-частицы, которое определяется многосекционным детектором. После регистрации α-частицы открывается временное окно, в течение которого ожидается возвращение в приёмник γ-кванта из досматриваемого объёма. Направление α-частицы и время до регистрации γ-кванта позволяют установить область пространства, в которой произошло рассеяние нейтрона, что повышает общую чувствительность метода.

Приборы, работающие по ММН, реагируют также на ложные совпадения, искажающие измеряемый спектр. Например, в детектор в течение разрешенного временного окна может попасть гамма-квант, индуцированный одним из предыдущих нейтронов. Другим примером ложных совпадений являются α-n совпадения, вызванные α-частицами и рассеявшимися назад нейтронами. С повышением мощности источника нейтронов растёт не только скорость набора спектра, но и относительное количество ложных совпадений.

На практике отделить истинные события от ложных невозможно, поэтому оценка эффективности таких приборов проводится расчётным методом. Для этого обычно применяется метод Монте-Карло. Низкая вероятность регистрации совпадений приводит к тому, что расчёт спектра на современном компьютере может длиться месяцами. В этом случае целесообразно использование весовых методов Монте-Карло, позволяющих ускорить расчёты на порядки. Весовые методы хорошо проработаны для вычисления значения величин, зависящих от одночастичной плотности распределения излучения, то есть обладающих свойством аддитивности по столкновениям

$$q(T) = \sum_{i=1}^{l(T)} q(x_i), \tag{1}$$

где q – отклик детектора, $T = (x_1, x_2, \ldots, x_{l(T)})$ – ветвящаяся траектория, x_i – величины, описывающие отдельные акты взаимодействия излучения с веществом (координаты, скорости до и после взаимодействия), $l(T)$ – длина траектории. Однако функционал, описывающий отклик схем совпадений, должен зависеть от совместной плотности распределения частиц, то есть он не может быть представлен в виде (1).

Если важно учесть совпадения между событиями, взванными частицами, относящимися к одной ветвящейся траектории (имеющими одну и ту же первичную частицу), то можно воспользоваться методами, изложенными в работе [1]. Эти методы разработаны для случая, когда не выполняется (1), но отклик прибора аддитивен по траекториям, то есть выполняется

$$q(T^1, T^2, \ldots, T^N) = \sum_{i=1}^{N} q(T^i), \tag{2}$$

где N – общее количество разыгранных ветвящихся траекторий, T^i – разыгранные траектории. Целью настоящей работы является разработка весовых методов для общего случая, когда ложные совпадения могут возникать между частицами, относящимися к разным ветвящимся траекториям. При этом условия (1) и (2) не соблюдаются.

Рассматриваемые весовые методы. Следуя [1, 2], будем рассматривать ветвящуюся траекторию как элементарный исход статистического испытания. Статистический вес при этом приписывается всей траектории целиком, а не отдельным частицам. Это позволяет применить весовые методы, описанные в [3], а потом перейти к рассмотрению весовых методов на произведении вероятностных пространств [4]. Кратко опишем суть рассматриваемых весовых методов.

В результате применения **метода существенной выборки** весовой множитель имеет вид производной Радона-Никодима $w_e(T) = \partial P/\partial P'(T)$, где P – физическая вероятность реализации траектории, P' – смещенная вероятность.

Применение **метода расщепления** дает весовые множители $w_{sj}(T_j)$ для каждой из m альтернативных реализаций траекторий T_j, на которые расщепился исходный трек, причем

$$\sum_{j=1}^{m} w_{sj}(T_j) = 1. \tag{3}$$

Весовой множитель при применении метода **русской рулетки** имеет вид $w_{rr}(T, u) = v^{-1}(T)I(u < v(T))$, где $I(A)$ – индикатор события A, u – реализация равномерно распределенной на [0,1] случайной величины, $v(T)$ – вероятность выживания.

При применении **композиции методов** вес траектории равен произведению весовых множителей, возникающих при каждом применении того или иного весового метода, и может быть записан в виде

$$w_j(T_j, u) = w_e(T_j) \cdot w_{sj}(T_j) \cdot w_{rr}(T_j, u).$$

Весовая оценка имеет вид

$$Q^* = \sum_{j=1}^{m} w_j(T_j, u) q(T_j). \tag{4}$$

Доказательство несмещенности оценки можно провести, выполнив следующие действия в любой последовательности: взятие среднего по u, приведение подобных членов с учетом (3), взятие среднего по всем траекториям с использованием теоремы о замене меры.

Учет совпадений между разными траекториями. Обозначим N – количество разыгрываемых историй, m_i – количество альтернатив, на которые расщепилась i-ая траектория T^i в результате применения весовых методов, T^i_j – j-ая альтернатива i-ой траектории, w^i_j – ее статистический вес, $j = 1, 2, \ldots, m_i$, i – номер статистического испытания, $i = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим через $q(T^1, T^2, ..., T^N)$ функцию отклика детектора. Предлагаемая весовая оценка среднего значения отклика детектора имеет вид

$$Q^*_{1..N} = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{j_N=1}^{m_N} w^1_{j_1} w^2_{j_2} \ldots w^N_{j_N} q(T^1_{j_1}, T^2_{j_2}, \ldots, T^N_{j_N}), \tag{5}$$

где суммирование ведется по всем возможным комбинациям альтернативных реализаций траекторий.

Так как траектории разыгрываются независимо друг от друга, то при доказательстве несмещенности оценки (5) усреднять можно по каждой траектории в отдельности. Усредняя по последней траектории, с учетом несмещенности (4) имеем

$$M_{T^N} Q^*_{1..N} = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{j_{N-1}=1}^{m_{N-1}} w^1_{j_1} w^2_{j_2} \ldots w^{N-1}_{j_{N-1}} M_{T^N} q(T^1_{j_1}, T^2_{j_2}, \ldots, T^{N-1}_{j_{N-1}}, T^N).$$

Аналогично усредняя по оставшимся траекториям получаем

$$M_{T^1 T^2 \ldots T^N} Q^*_{1..N} = M_{T^1 T^2 \ldots T^N} q(T^1, T^2, \ldots, T^N),$$

что доказывает несмещенность предлагаемой оценки.

Способ вычисления. Количество слагаемых в формуле (5) растет экспоненциально по N, что может сделать невозможным перебор всех слагаемых. Если схема совпадений не сильно нагружена, то можно применить следующий подход для вычисления (5). Пусть δ – время восстановления схемы совпадений такое, что при отсутствии сигнала в течение этого времени отклик прибора представим в виде суммы откликов до и после наступления времени восстановления.

Обозначим a^i_j и b^i_j – время первого и последнего взаимодействия с детектором частиц траектории T^i_j. Пусть $a^i = \min\limits_{j=1,2,\ldots,m_i} a^i_j$ и $b^i = \max\limits_{j=1,2,\ldots,m_i} b^i_j$. Если для какого-то номера f

выполняется условие

$$\min_{i=f,f+1,\ldots,N} a^i > \max_{i=1,2,\ldots,f-1}(b^i) + \delta, \tag{6}$$

то для любой комбинации траекторий $T^1 j_1, T^2_{j_2}, \ldots, T^N_{j_N}$ выполняется

$$q(T^1_{j_1}, T^2_{j_2}, \ldots, T^N_{j_N}) = q(T^1_{j_1}, T^2_{j_2}, \ldots, T^{f-1}_{j_{f-1}}) + q(T^f_{j_f}, T^{f+1}_{j_{f+1}}, \ldots, T^N_{j_N}). \tag{7}$$

Если условие (6) выполняется для всех номеров $i = 2, 3, \ldots, N$, то справедливо равенство (2), и можно воспользоваться методами из [1]. Дальнейшие рассуждения полезны в случае, если это не всегда так. Пусть $\{f_i\}_{i=1,2,\ldots,K}$ – упорядоченная по возрастанию последовательность всех таких номеров f, для которых справедливо (6), причем полагаем $f_1 = 1$, $f_{K+1} = N + 1$. Тогда в сумме (5) с учетом (3) и (7) можно сгруппировать слагаемые, что дает

$$Q^*_{1..N} = \sum_{i=1}^{K} Q^*_{f_i..f_{i+1}-1}.$$

Перебор всех возможных комбинаций в каждом слагаемом этой формулы проводится только по тем траекториям, от которых непосредственно зависит само слагаемое, что экспоненциально уменьшает количество рассматриваемых комбинаций по сравнению с (5).

Заключение. В работе получена весовая оценка отклика детектора, если он не обладает свойством аддитивности по траекториям. Оценка записывается в виде взвешенной суммы отклика детектора по всем возможным комбинациям альтернативных реализаций траекторий. Вес комбинации определяется как произведение весов выбранных альтернатив. Вычисление по предложенной формуле при использовании расщепляющих методов может стать невозможным в виду большого количества слагаемых. В случае, если случайные совпадения достаточно редки, то все траектории можно разбить на непересекающиеся группы, а рассмотрение всех возможных комбинаций можно заменить на рассмотрение всех возможных комбинаций в каждой группе в отдельности. Практическая ценность разработанного весового подхода заключается в ускорении расчётов при моделировании приборов, работающих по схемам совпадений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] T. A. Booth, Nucl. Sci. Eng. **116**(2), 113 (1994). DOI: 10.13182/NSE94-A21487.

[2] Е. А. Цветков, Журнал вычислительной математики и математической физики **54**(2), 183 (2014). DOI: 10.7868/S0044466914020148.

[3] С. М. Ермаков, *Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс* (СПб., Невский диалект, М., Бином. Лаборатория знаний, 2009).

[4] Е. А. Цветков, В: *VII Международная конференция по математическому моделированию:* Тез. докл. 30 июня–4 июля 2014 г. Якутск (СВФУ, 2014), стр. 169. https://www.s-vfu.ru/universitet/nauka/mkmm/downloads/Abstracts_ICMM-2014.pdf.

Поступила в редакцию 15 апреля 2021 г.

После доработки 5 июля 2021 г.

Принята к публикации 6 июля 2021 г.