

ЧАСТИЧНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ШУМОВ В ОСНОВНОЙ МОДЕ ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Н. О. Жаднов¹, Н. Н. Колачевский^{1,2}

Тепловой шум оптических резонаторов ограничивает точность многих экспериментов по прецизионной лазерной спектроскопии и интерферометрии. Исследование физических свойств указанных шумов открывает возможности для создания более стабильных резонаторов, снижения фазовых шумов оптического излучения и выполнения точных оптических исследований. В работе предложен метод регистрации тепловых шумов ТЕМ₀₀ моды резонатора Фабри-Перо при помощи двух “пробных” мод старших порядков, позволяющий частично компенсировать шумы в основной моде. Произведено математическое моделирование, подтверждающее эффективность метода.

Ключевые слова: резонатор Фабри-Перо, тепловой шум зеркал, Лагерр-Гауссовы моды.

Введение. Высокостабильные оптические резонаторы широко используются во многих экспериментах, связанных с прецизионными оптическими измерениями: для регистрации гравитационных волн [1], поиска темной материи [2, 3], спектроскопии высокого разрешения в оптических атомных часах [4, 5] и в других фундаментальных исследованиях [6, 7]. Стабилизация частоты лазеров по опорным монолитным высокодобротным резонаторам Фабри-Перо при помощи метода Паунда-Драйвера-Холла [8] позволяет уменьшить ширину спектральной линии излучения до величин менее 100 мГц [9–11].

Нестабильность частоты моды резонатора ν связана с нестабильностью его длины L соотношением:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta L}{L}. \quad (1)$$

¹ ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: nik.zhadnov@yandex.ru.

² Российский Квантовый Центр, Инновационный Центр “Сколково”, 121205 Россия, Москва, Большой бульвар, д. 30, стр. 1.

Фундаментальный предел стабильности L определяется броуновскими тепловыми колебаниями резонатора, которые принято называть тепловыми шумами. Их физические свойства позволяет описать флуктуационно-диссипационная теорема [12, 13]. Случайные колебания указанной природы свойственны любому нагретому телу. Тепловые шумы оптического резонатора можно представить как случайные колебания поверхности зеркал, приводящие к флуктуациям его длины, усреднённой по пятну моды излучения на каждом зеркале. На сегодняшний день предельная достижимая стабильность частоты лучших лазерных систем с опорными резонаторами ограничена тепловыми шумами. Чувствительность гравитационно-волновых детекторов LIGO в диапазоне частот 30–200 Гц также ограничена тепловыми колебаниями зеркал интерферометров [15]. Эффективный метод расчёта тепловых шумов зеркал предложен в работе [14].

Существенный прогресс в уменьшении тепловых шумов может быть достигнут путём увеличения длины резонатора, понижения его рабочей температуры и использования материалов с высокой механической добротностью (кварц, монокристаллический кремний) для изготовления зеркал [16]. Также снизить предел тепловых шумов приблизительно в два раза можно при использовании вместо основной моды TEM_{00} других гауссовых мод старших порядков [17]. Данный эффект достигается за счёт больших поперечных размеров мод старших порядков, что приводит к лучшему усреднению тепловых колебаний поверхности. При наличии нескольких ультрастабильных лазерных систем, имеющих близкие показатели стабильности, возможно произвести усреднение их частот и таким образом преодолеть предел тепловых шумов для одной системы [18].

В данной работе предложен метод исследования тепловых шумов выбранной “основной” моды излучения в резонаторе при помощи возбуждения в нем двух дополнительных “пробных” мод, что позволяет получить радиочастотный сигнал, шумы которого содержат в себе информацию о тепловом шуме “основной” моды. В дальнейшем указанный сигнал может быть использован для частичной компенсации шумов лазерного излучения в основной моде по аналогии с методом компенсации вибраций, описанном в работе [19]. Наличие частотного отклика зеркал резонатора на изменение мощности заводимого в него излучения [9, 20] открывает возможности для активного подавления тепловых шумов. Кроме того, измерение и анализ тепловых флуктуаций позволит изучать механические свойства многослойных брэгговских зеркал [21].

Измерение тепловых шумов моды резонатора. Так как лазерная мода на зеркалах резонатора имеет конечные размеры, то вклад в её тепловой шум дают только те участки отражающей поверхности, на которые падает излучение. Можно показать, что сдвиг

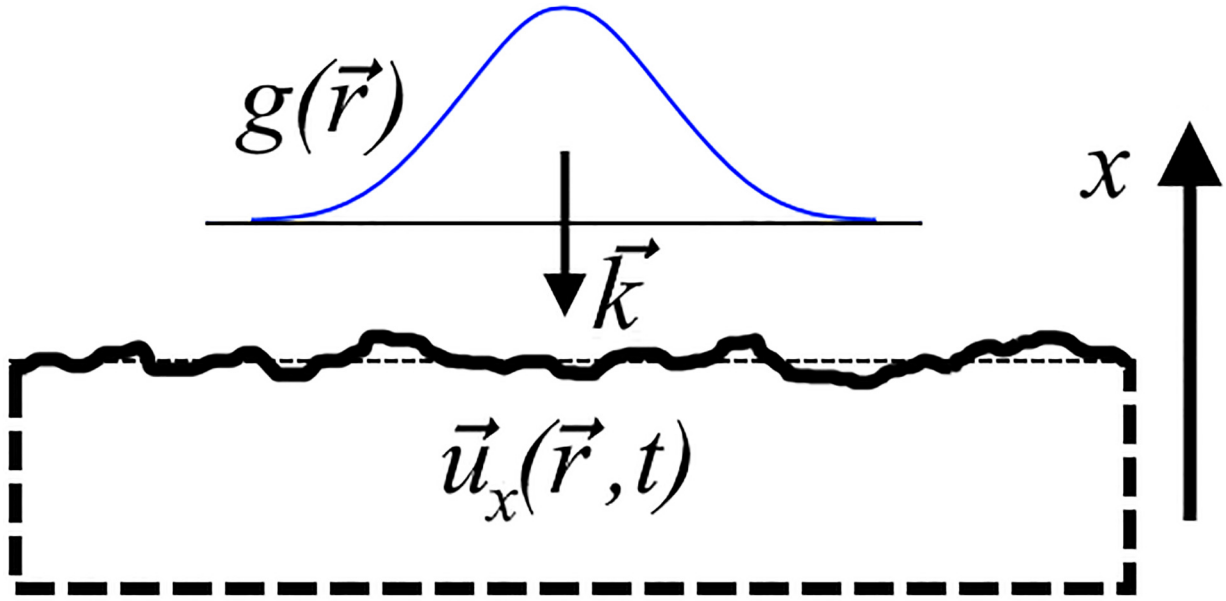


Рис. 1: Гауссов пучок TEM_{00} моды, падающий на поверхность зеркала, искаженную тепловыми шумами.

фазы пучка с характерным нормированным на единицу профилем интенсивности $g(\vec{r})$ при его отражении от поверхности зеркала, возмущённой тепловыми шумами $\vec{u}(\vec{r}, t)$ (рис. 1), выражается как [22]:

$$\Delta\phi(t) = \int_S g(\vec{r}) \cdot (\vec{k}, \vec{u}(\vec{r}, t)) \cdot d^2r. \quad (2)$$

Интегрирование в данном случае производится по поверхности зеркала S ; \vec{r} – радиус-вектор точки на поверхности зеркала; $\vec{u}(\vec{r}, t)$ – смещение точки зеркала с радиус-вектором \vec{r} от невозмущенного положения; \vec{k} – волновой вектор падающего излучения, перпендикулярный поверхности зеркала. Используя сдвиг фазы $\Delta\phi(t)$, можно ввести величину “эффективного” смещения поверхности зеркала вдоль оси x :

$$X(t) = \frac{\Delta\phi(t)}{|\vec{k}|} = \int_S g(\vec{r}) \cdot u_x(\vec{r}, t) \cdot d^2r. \quad (3)$$

Любую собственную моду резонатора можно представить в виде суперпозиции эрмит-гауссовых или лаггерр-гауссовых функций [23]. За счет более эффективного усреднения колебаний отражающей поверхности, меньшую чувствительность к тепловым шумам имеют моды, интенсивность которых распределена по большей площади зеркала. Распределение интенсивности $g(\vec{r})$ для каждой моды имеет свой характерный

вид, в результате чего тепловые шумы для разных мод могут определяться тепловыми флуктуациями в непересекающихся частях зеркала. На этом факте основан предлагаемый нами метод исследования теплового шума.

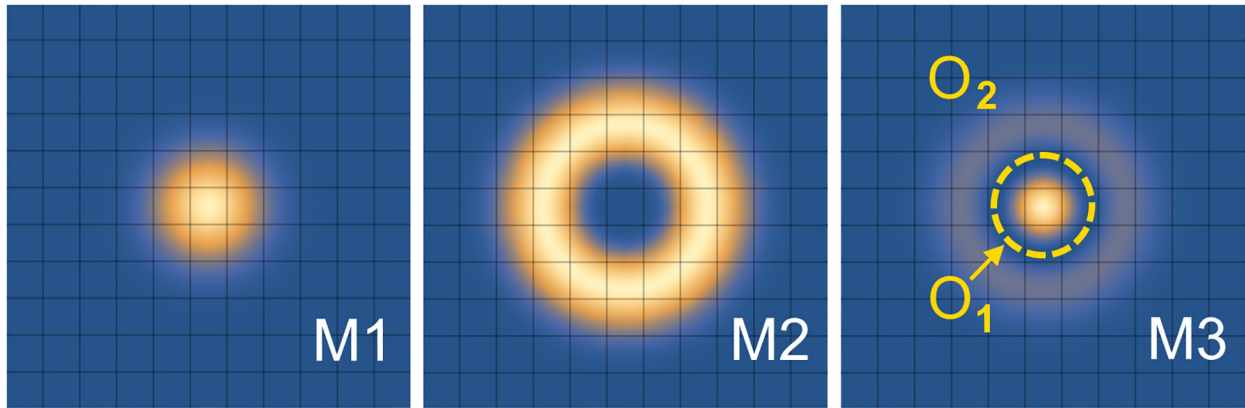


Рис. 2: Профили Лагерр-Гауссовых мод. Слева направо: основная LG_{00} (M1), и пробные LG_{03} (M2), LG_{10} (M3). Также указаны области O_1 и O_2 , описанные в тексте.

Для его реализации необходимо выбрать три моды: M1 – “основная”, то есть та, тепловой шум которой требуется частично охарактеризовать, а M2 и M3 – “пробные”. Будем считать, что все три лазерных пучка, соответствующие модам, привязаны к резонатору по частоте и стабильность каждого из них ограничена тепловыми шумами. Во избежание интерференционных эффектов все моды должны иметь различные частоты, что можно реализовать с помощью одного лазера, осуществив требуемую отстройку частоты при помощи модуляторов. Разделим поверхность зеркала на две условные области: O_1 – где сосредоточена интенсивность основной моды M1 и O_2 – где сосредоточена интенсивность пробной моды M2. При этом моду M2 следует выбрать таким образом, чтобы она как можно слабее перекрывалась с модой M1. В свою очередь, мода M3 должна иметь сильное перекрытие с модами M1 и M2. Примером трёх мод, удовлетворяющих указанным требованиям, являются лагерр-гауссовы моды LG_{00} (M1), LG_{03} (M2), LG_{10} (M3), представленные на рис. 2. M2 относится к спиральным лагерр-гауссовым модам [17].

При гетеродинировании оптических полей мод M2 и M3 тепловые шумы в области O_2 окажутся коррелированы и частично компенсируются в сигнале биений (радиочастотный диапазон). При этом в сигнале останется тепловой шум, создаваемый колебаниями поверхности зеркала в области O_1 , которая покрывается основной модой M1. Таким образом, флуктуации частоты полученного сигнала могут быть вычтены из частоты

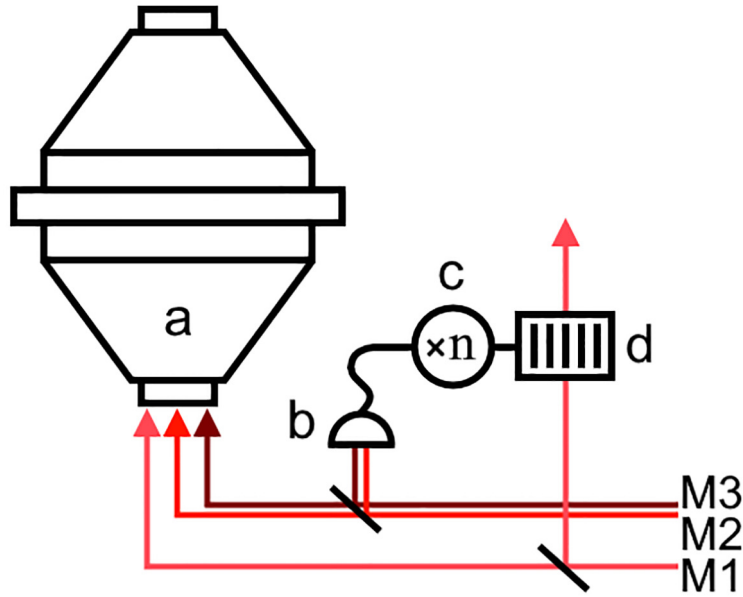


Рис. 3: Упрощённая схема эксперимента по измерению и частичной компенсации теплового шума основной моды 1. *a* – высокостабильный монолитный резонатор Фабри-Перо, *b* – фотодетектор для регистрации биений *M2* и *M3*, *c* – радиочастотный умножитель, *d* – акустооптический модулятор.

излучения моды *M1*, например, при помощи акустооптического модулятора (рис. 3). Это снижает вклад тепловых шумов в нестабильность частоты лазерного излучения в основной моде *M1*. При этом остаточные флуктуации частоты $\delta\nu_{132}$ составят:

$$\delta\nu_{132}(t) = -\frac{\nu_1}{L} \int_S [g_1(\vec{r}) - (g_3(\vec{r}) - g_2(\vec{r}))] \cdot u_x(\vec{r}, t) \cdot d^2r. \quad (4)$$

Моделирование. Описанный выше метод был проанализирован при помощи математического моделирования. Для этого многократно случайным образом создавалась поверхность $u_x(\vec{r})$, соответствующая броуновским тепловым колебаниям, а затем в соответствии с формулой (3) было выполнено вычисление интегральных смещений поверхности для профиля интенсивности каждой моды. Для простоты в расчёте рассмотрены только тепловые шумы одной отражающей поверхности в статическом случае. Роль зеркала, возмущенного тепловыми шумами, выполняла фрактальная поверхность, сформированная в результате броуновского процесса. Метод создания таких поверхностей описан в [24]. Полученные в результате функции $u_x(\vec{r})$ описываются при помощи двух параметров: лакуарности r и коэффициента Хёрста h . Последний параметр в большей степени отвечает за “зашумленность” поверхности. Для моделирования теплового шу-

ма, являющегося $1/f$ -шумом, наиболее подходят значения h , близкие к 1 [25]. Параметр лакуарности для всех подсчетов был выбран равным 0.5.

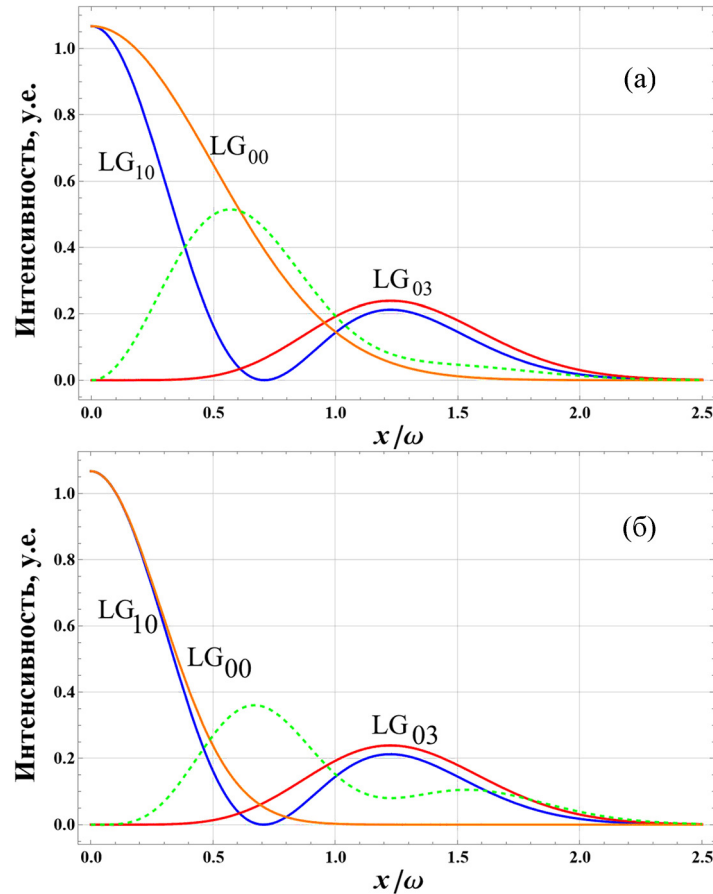


Рис. 4: (а) профили интенсивности мод, представленных на рис. 2. Оранжевая кривая (основная мода $M1$, LG_{00}) соответствует функции $g_1(x/\omega)$, красная (пробная мода $M2$, LG_{03}) – $g_2(x/\omega)$, синяя (пробная мода $M3$, LG_{10}) – $g_3(x/\omega)$. Зеленая пунктирная линия соответствует комбинации $[g_1(\vec{r}) - (g_3(\vec{r}) - g_2(\vec{r}))]$. ω – радиус пятна основной моды LG_{00} на зеркале по уровню интенсивности $1/e^2$. (б) аналогичный (а) график, но мода LG_{00} имеет в три раза меньшую длину волны чем LG_{10} , LG_{03} . Интенсивность моды LG_{00} на графике (оранжевая кривая) уменьшена в три раза для более наглядной демонстрации совпадения с профилем центрального пятна моды LG_{10} . Зеленая пунктирная линия соответствует комбинации $[g_1(\vec{r}) - 3 \cdot (g_3(\vec{r}) - g_2(\vec{r}))]$.

В расчётах были использованы броуновские поверхности различной зашумлённости, со значениями коэффициента Хёрста в диапазоне 0.5–1 (таблица 1). Для каждого значения было сгенерировано 15 случайных поверхностей и выполнены вычисления X_i по

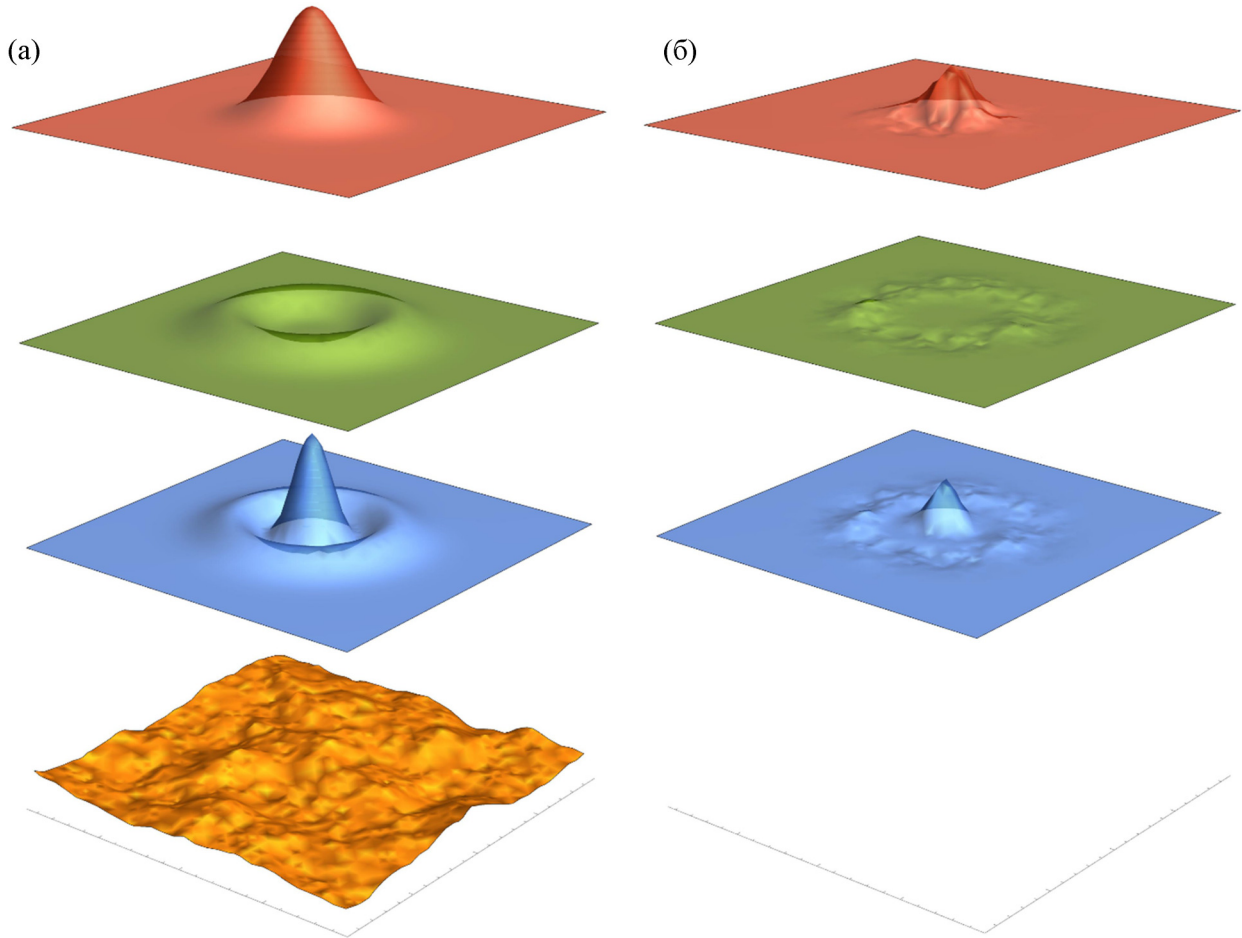


Рис. 5: Иллюстрация тепловых шумов для трех мод. (а) (сверху вниз) – пространственные профили интенсивности мод LG_{00} ($M1$), LG_{03} ($M2$), LG_{10} ($M3$) и броуновская поверхность $u_x(\vec{r})$ с $h = 0.8$. (б) – функции, полученные умножением соответствующих профилей интенсивности на $u_x(\vec{r})$.

формуле (3) для каждой из трёх мод $i = 1, 2, 3$ (рис. 5). Полученные значения X_i составили выборки из 15 членов, для которых были подсчитаны стандартные отклонения σ_{X_i} . Также были вычислены среднеквадратичные отклонения поверхности $\sigma_{X_{132}}$ для комбинаций $X_{132} = X_1 - (X_3 - X_2)$, величины которых позволяют судить об эффективности предложенного метода определения тепловых шумов. Полученные данные представлены в табл. 1. В силу того, что характерные величины горбов и провалов использованных в расчёте броуновских поверхностей не связаны с физическими свойствами реальных зеркал, показательными являются не абсолютные значения вычисленных величин, а их

отношения. Как можно заметить из последнего столбца табл. 1, отношение $\sigma_{X132}/\sigma_{X1}$ колеблется в окрестности 0.7, что говорит о том, что в результате вычитания разности шумов пробных мод из искомой моды её шумы уменьшаются. Это уменьшение оказывается относительно небольшим из-за недостаточно хорошего согласования профилей мод (рис. 4(а)).

Т а б л и ц а 1

Результаты моделирования для случая, когда все моды имеют одну и ту же длину волны

h	σ_{X1}	σ_{X2}	σ_{X3}	σ_{X132}	$\sigma_{X132}/\sigma_{X1}$
0.5	11.47	7.52	9.19	9.35	0.82
0.6	11.29	6.13	6.95	8.40	0.75
0.7	9.27	4.46	5.66	6.74	0.73
0.8	4.01	2.56	2.68	3.14	0.79
0.9	3.15	1.58	1.27	1.72	0.55
0.94	3.68	1.40	2.25	2.54	0.69
0.95	2.63	0.86	1.33	1.79	0.68
0.98	1.52	0.70	0.90	1.12	0.74

Т а б л и ц а 2

Результаты подсчёта для случая, когда моды M2 и M3 имеют одинаковую длину волны, а мода M1 – в три раза меньшую

h	σ_{X1}	σ_{X2}	σ_{X3}	σ_{X132}^*	$\sigma_{X132}^*/\sigma_{X1}$
0.5	14.49	6.62	6.86	6.66	0.46
0.6	12.21	4.95	4.73	4.41	0.36
0.7	11.41	4.35	5.90	5.39	0.47
0.8	6.68	2.89	3.22	3.32	0.50
0.9	5.59	1.04	2.01	1.64	0.29
0.94	2.99	1.04	1.36	1.19	0.40
0.96	2.54	0.98	1.26	1.16	0.46
0.98	1.49	1.11	0.94	0.99	0.66

Улучшить согласование профилей выбранных мод возможно путём подбора длины волны излучения λ , поскольку радиус гауссова пучка ω пропорционален $\sqrt{\lambda}$. При

уменьшении длины волны моды М1 в 3 раза возможно добиться достаточно точного совпадения её контура и контура центрального пятна моды М3, как показано на рис. 4(б). В этом случае сигнал биений пробных мод более точно описывает тепловые шумы центральной области зеркала, в которой сосредоточена интенсивность моды М1. Результаты соответствующих расчетов представлены в табл. 2.

Вычисления $\sigma_{X_{132}}^*$ производились для величины $X_{312}^* = X_1 - 3 \cdot (X_3 - X_2)$, которая учитывает отношение интенсивностей мод М3 и М1 в центре зеркала, равное 3. В эксперименте трёхкратное увеличение частоты сигнала биений М3 и М2 можно обеспечить при помощи умножителя частоты. Полученные значения $\sigma_{X_{132}}^*/\sigma_{X_1}$, находящиеся в окрестности 0.5, свидетельствуют о том что улучшение геометрического согласования приводит к более эффективной компенсации шума.

Заключение. Метод частичной компенсации тепловых флуктуаций оптических резонаторов в основной моде излучения, предложенный в работе, основан на том что тепловой шум каждой отдельной моды определяется шумами той области поверхности зеркала, на которой сосредоточена её интенсивность. Математическое моделирование броуновских поверхностей позволило подсчитать усреднённые смещения зеркал из-за броуновского движения поверхности для различных мод и подтвердить, что сигнал биений мод LG₁₀ и LG₀₃ частично содержит в себе тепловые шумы моды LG₀₀. Выбор основной моды LG₀₀ не случаен: на этой моде работает большинство стабилизированных лазеров и гравитационных детекторов, поскольку при этом обеспечивается наилучшая связь с лазерной модой и, соответственно, максимальная мощность. При этом пробные моды более высоких порядков, обладающие более низким уровнем тепловых шумов, являются вспомогательными и обеспечивают возможность компенсации флуктуаций в основной моде.

В случае, когда все моды имеют одну и ту же длину волны, метод позволяет компенсировать около 30% тепловых шумов основной моды. Если пробные моды имеют утроенную частоту, то совпадение профилей интенсивностей оказывается лучше и вычитание позволяет подавить около 50% шумов. При этом характерные значения стандартного отклонения $\sigma_{X_{132}}$ поверхности зеркала для основной моды даже после вычитания части тепловых шумов оказываются большими, чем значения σ_X , соответствующие пробным модам LG₁₀ и LG₀₃. Моды старших порядков сложно эффективно возбуждать, поэтому метод может быть использован для повышения стабильности частоты излучения, соответствующего выбранной рабочей моде. Три моды, для которых был выполнен анализ, выбраны для иллюстрации метода и, скорее всего, не являются оптимальной

комбинацией. Более оптимальный выбор мод, имеющих лучшее согласование профилей интенсивности, позволит еще качественнее компенсировать шумы в основной моде.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ гранта 19-32-90207).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] B. P. Abbott et al., Reports Prog. Phys. **72**, 113 (2009). DOI: 10.1088/0034-4885/72/7/076901.
- [2] E. Savalle et al., Phys. Rev. Lett. **126**(5), 051301 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.051301.
- [3] A. A. Geraci, C. Bradley, D. Gao, et al., Phys. Rev. Lett. **123**(3), (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.031304.
- [4] E. Oelker et al., Nat. Photonics **13**(10), 714 (2019). DOI: 10.1038/s41566-019-0493-4.
- [5] S. M. Brewer et al., Phys. Rev. Lett. **123**(3), 33201 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.033201.
- [6] M. Takamoto et al., Comptes Rendus Physique, (2015). DOI: 10.1016/j.crhy.2015.04.003.
- [7] Н. Н. Колачевский, К. Ю. Хабарова, УФН **184**(12), 1354 (2014). DOI: 10.3367/UFNr.0184.201412e.1354.
- [8] R. W. P. Drever et al., Appl. Phys. B **31**(2), 97 (1983). DOI: 10.1007/BF00702605.
- [9] S. Häfner et al., Opt. Lett. **40**(9), 2112 (2015). DOI: 10.1364/OL.40.002112.
- [10] D. G. Matei et al., Phys. Rev. Lett. **118**(26), 1 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.263202.
- [11] J. M. Robinson et al., Optica **6**(2), 240 (2019). DOI: 10.1364/OPTICA.6.000240.
- [12] H. B. Callen and R. F. Greene, Phys. Rev. **86**(5), 702 (1952). DOI: 10.1103/PhysRev.86.702.
- [13] R. F. Greene and H. B. Callen, Phys. Rev. **88**(6), (1952). DOI: 10.1103/PhysRev.88.1387.
- [14] Y. Levin, Phys. Rev. D – Part. Fields, Gravit. Cosmol. **57**(2), 1 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevD.57.659.
- [15] A. Buikema et al., Phys. Rev. D **102**(6), 62003 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevD.102.062003.

- [16] T. Kessler, T. Legero, and U. Sterr, *J. Opt. Soc. Am. B* **29**(1), 178 (2011). DOI: 10.1364/JOSAB.29.000178.
- [17] S. Chelkowski, S. Hild, and A. Freise, *Phys. Rev. D – Part. Fields, Gravit. Cosmol.* **79**(12), 1 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevD.79.122002.
- [18] L. Yan et al., 2019 Conf. Lasers Electro-Optics, CLEO 2019 – Proc., **1**, 1 (2019). DOI: 10.1364/CLEO_AT.2019.JTu2A.66.
- [19] M. J. Thorpe, D. R. Leibbrandt, T. M. Fortier, and T. Rosenband, *Opt. Express* **18**(18), 18744 (2010). DOI: 10.1364/OE.18.018744.
- [20] N. O. Zhadnov, K. S. Kudeyarov, D. S. Kryuchkov, et al., “Long 48-cm ULE cavities in vertical and horizontal orientations for Sr optical clock,” arXiv:2106.01887, 2021.
- [21] T. Hong, H. Yang, E. K. Gustafson, R. X. Adhikari, and Y. Chen, *Phys. Rev. D – Part. Fields, Gravit. Cosmol.* **87**(8), 1 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevD.87.082001.
- [22] A. Gillespe and F. Raab, *Phys. Rev. D* **52**(2), 577 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevD.52.577.
- [23] Ю. А. Ананьев, *Оптические резонаторы и лазерные пучки*(М., Наука, 1990).
- [24] R. Maeder, “The Mathematica Programmer II”, 1996.
- [25] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, *SIAM Rev.* **10**(4), 422 (1968). DOI: 10.1137/1010093.

Поступила в редакцию 9 июня 2021 г.

После доработки 7 июля 2021 г.

Принята к публикации 8 июля 2021 г.