

## О ЗАКОНЕ ОТРАЖЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКЕ

В. Г. Куракин

*При распространении пучка заряженных частиц в среде его поперечные размеры из-за многократного кулоновского рассеяния на ядрах среды увеличиваются по закону трех вторых. Поэтому при наклонном падении пучка на рассеивающую среду с плоской границей периферийные частицы пучка по мере его движения достигают границы раздела и покидают среду. Имеет место частичное отражение пучка. В работе аналитическим методом установлены закономерности такого отражения. Приводятся соответствующие формулы и графические зависимости.*

**Ключевые слова:** многократное кулоновское рассеяние, функция распределения, метод линий тока, стохастическая электронная оптика, отражение пучка.

Прохождение заряженной частицы через вещество сопровождается взаимодействием этой частицы с атомами и ядрами среды, из которых мы выделим процесс многократного кулоновского рассеяния. Как показано в работах [1–3], именно этот механизм взаимодействия заряда и среды определяет коллективные стохастические явления при движении пучка заряженных частиц, что дало основание говорить о стохастической электронной оптике, исследующей процессы преобразования фазового объема пучка заряженных частиц при его распространении в рассеивающей среде, а также процессы отражения и преломления такого пучка.

Уравнение, описывающее процесс рассеяния движущегося заряда на ядрах среды, имеет вид [4]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\Theta_s^2}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (1)$$

Здесь  $P dy d\theta = P(x, y, \theta) dy d\theta$  – вероятность обнаружить заряд, движущийся в направлении  $x$  и находящийся на глубине  $x$  рассеивающей среды в интервале поперечных

смещений  $(y, y + dy)$ , рассеиваемых в интервале углов  $(\theta, \theta + d\theta)$ , отсчитываемых от направления первоначальной скорости заряда. Данное уравнение описывает поперечное движение в каждой из двух взаимно-перпендикулярных координатных плоскостей, пересекающихся по оси  $x$ . Параметр  $\Theta_s^2$  можно выразить через величины, описывающие радиационные процессы в веществе

$$\Theta_s^2 = \left( \frac{E_s}{\beta c p} \right)^2 \frac{1}{X_0}, \quad E_s = \left( \frac{4\pi}{\alpha} \right)^{1/2} m_e c^2, \quad (2)$$

где  $\beta$ ,  $p$ ,  $c$  – соответственно приведённая скорость заряда, его импульс и скорость света,  $X_0$  – радиационная длина,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  – постоянная тонкой структуры,  $e$ ,  $m_e$  – заряд электрона и его масса,  $\hbar$  – постоянная Планка. Предполагается, что рассеиваемая частица несет элементарный заряд.

Решение уравнения (1) для безграничной однородной рассеивающей среды выглядит как

$$P(x, y, \theta) dy d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 x^2} \exp \left[ -\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left( \theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \right) \right] dy d\theta. \quad (3)$$

Линии равной вероятности  $P(x, y, \theta) = \text{const}$  на глубине  $x$  представляют собой эллипсы, при этом площадь, охватываемая эллипсом, есть не что иное, как фазовая площадь, занятая пучком, которую принято называть поперечным эмиттансом – горизонтальным или вертикальным – в оптике пучков заряженных частиц. Этот эмиттанс, как показано в [2], растёт как квадрат расстояния от начала старта частицы, или как квадрат толщины мишени.

Как это следует из соотношения (3), среднее значение угла рассеяния для частицы, попавшей в точку среды с координатами  $(x, y)$ , равно

$$\langle \theta \rangle = \frac{3y}{2x}. \quad (4)$$

Это, в частности, означает, что все заряды, попавшие в результате рассеяния на прямую  $x = ky$ , в среднем рассеиваются в направлении, составляющем угол  $\psi = 3/2k$  с вектором начальной скорости заряда независимо от глубины проникновения  $x$  последнего в рассеивающую среду. Если теперь представить, что рассеивающая среда не безгранична, а граничит с вакуумом, причем эта граница описывается со стороны влета заряда уравнением  $x = ky$  (рис. 1), то заряды, попавшие на границу раздела, рассеиваются в дальнейшем как внутрь среды, так и в вакуум.

Будем считать, что вероятность рассеяния по углам описывается, как и в случае безграничной среды, соотношением (3). Средний угол рассеяния заряда в вакуум  $\langle \theta \rangle$

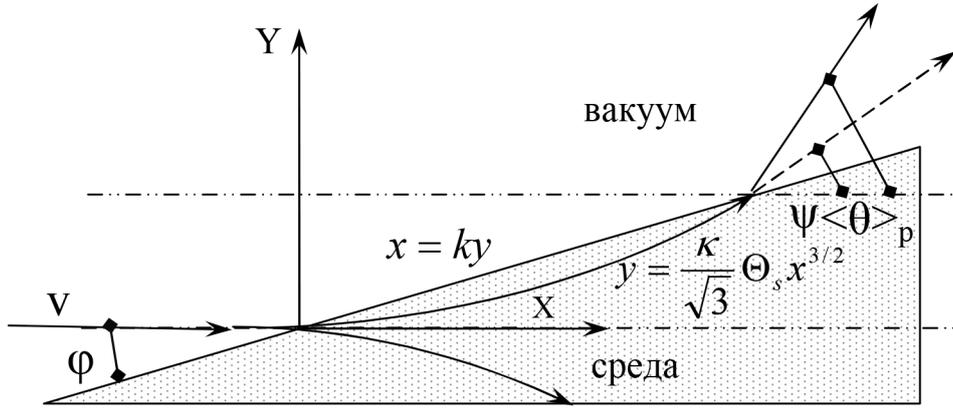


Рис. 1: Рассеяние зарядов, попавших на границу раздела среды и вакуума.

из произвольной точки  $x$  на границе рассеивающая среда–вакуум определяется соотношением

$$\langle \theta \rangle_p = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \theta \exp \left[ -\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left( \theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \right) \right] d\theta}{\int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \exp \left[ -\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left( \theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \right) \right] d\theta}. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi$  – угол, образованный вектором скорости налетающего на рассеивающую среду заряда с плоскостью, разделяющей рассеивающую среду и вакуум

$$\varphi = a \tan \frac{1}{k}. \quad (6)$$

Выбор пределов интегрирования в формуле (5) легко понять, обратившись к рис. 1. Попавший на границу раздела заряд рассеивается с соответствующей долей вероятности по всем направлениям, часть рассеянных зарядов остается в среде, а часть из них вылетает в вакуум в пределах углов  $(\varphi, \varphi + \pi)$ , определяющих границы раздела среды и вакуума.

Несложные преобразования дают

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle_p &= \frac{\int_{\varphi-\psi}^{\varphi-\psi+\pi} \xi \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi + \psi \int_{\varphi-\psi}^{\varphi-\psi+\pi} \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi}{\int_{\varphi-\psi}^{\varphi-\psi+\pi} \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi} = \\ &= \psi + \frac{\int_{\varphi-\psi}^{\varphi-\psi+\pi} \xi \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi}{\int_{\varphi-\psi}^{\varphi-\psi+\pi} \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi}, \quad (7) \end{aligned}$$

что для малых углов падения (большие значения  $k$ ) дает

$$\langle \theta \rangle_p = \psi + \frac{\int_{-1/2k}^{-1/2k+\pi} \xi \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi}{\int_{-1/2k}^0 \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi + \int_0^{-1/2k+\pi} \exp \left[ -\frac{4\xi^2}{\Theta_s^2 x} \right] d\xi}. \quad (8)$$

Интегралы в (8) легко вычисляются или сводятся к стандартным. Имеем в итоге следующее выражение для среднего угла потока зарядов в вакуум из конкретной точки на границе раздела рассеивающей среды и вакуума

$$\langle \theta \rangle_p = \psi + \frac{\Theta_s \sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{1}{\Theta_s^2 x k^2} \right) \frac{1 - \exp \left( -\frac{4\pi}{\Theta_s^2 x} \left( \pi - \frac{1}{2k} \right) \right)}{\operatorname{erf} \left( \frac{1}{\Theta_s \sqrt{x} k} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{2}{\Theta_s \sqrt{x}} \left( \pi - \frac{1}{2k} \right) \right)}. \quad (9)$$

Согласно стандартной процедуре определения среднего угла рассеяния в вакуум для всего потока частиц, оказавшихся на границе в результате рассеяния игольчатого пучка, падающего на рассеивающую среду, необходимо знать распределение рассеянных зарядов на этой границе. Поскольку граница описывается линией, т. е. двумя измерениями, необходима трехмерная функция распределения с учетом угла рассеяния. Между тем функция  $P(x, y, \theta)$ , несмотря на формальную зависимость от трех переменных, фактически описывает двумерное распределение в координатах  $(y, \theta)$  в сечении  $x$ , т. е. переменная  $x$  выступает здесь лишь в качестве параметра. Из (3) следует функция распределения рассеянных зарядов по поперечной координате

$$S(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{1/2}} \exp \left( -\frac{3y^2}{\Theta_s^2 x^3} \right). \quad (10)$$

Легко проверить интегрированием по поперечной координате на бесконечном промежутке, что данная функция нормирована на единицу. Также легко убедиться в том, что интеграл по полубесконечному интервалу  $(0, +\infty)$  от функции  $S(x, y)$  после подстановки в неё  $x = ky$  расходится, что также свидетельствует о правомерности наших выводов.

Нами был предложен и успешно опробован [2, 3] несколько другой способ описания процессов многократного кулоновского рассеяния, основанный на методе линий и трубок тока. По определению, линия тока это такая линия на плоскости  $(x, y)$ , вдоль которой вероятность обнаружить заряд в области от данной линии до нулевого смещения

постоянна, т. е.

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \int_0^{|y|} S(x, \xi) d\xi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \int_0^{|y|} \exp\left(-\frac{3\xi^2}{\Theta_s^2 x^3}\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}|y|}{\Theta_s x^{3/2}}} \exp(-t^2) dt = \text{const.} \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее соотношение имеет место вдоль кривой

$$y = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{3/2}, \quad (12)$$

где  $\kappa$  – тоже какая-то постоянная ( $-\infty < \kappa < \infty$ ), зависящая от значения const в соотношении (11). Поскольку (11) не что иное как интеграл ошибок

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\sqrt{3}|y|}{\Theta_s x^{3/2}}\right), \quad (13)$$

параметр  $\kappa$ , входящий в (12) через указанную вероятность, определяется как

$$\kappa = \pm \text{erf}^{-1}(2W), \quad (14)$$

т. е. через функцию, обратную интегралу ошибок.

Между переменной  $\kappa$  и произвольной точкой  $(x, y)$  на плоской границе рассеивающая среда–вакуум существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое точкой пересечения линии тока (12) с прямой  $x = ky$ , описывающей эту границу

$$x = f_x(\kappa) = \frac{3}{k^2 \kappa^2 \Theta_s^2}, \quad y = f_y(\kappa) = \frac{3}{k^2 \kappa^2 \Theta_s^2}. \quad (15)$$

Из последней формулы следует значение для среднего угла рассеяния зарядов в вакуум для точки границы, соответствующей конкретному значению переменной  $\kappa$ . Подставляя (15) в (9), получим

$$\langle \theta \rangle_p = \psi + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi} k \kappa} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{3}\right) \frac{1 - \exp\left(-\frac{4\pi k^2 \kappa^2}{3} \left(\pi - \frac{1}{2k}\right)\right)}{\text{erf}\left(\frac{\kappa}{\sqrt{3}}\right) + \text{erf}\left(\frac{2k\kappa}{\sqrt{3}} \left(\pi - \frac{1}{2k}\right)\right)}. \quad (16)$$

Для вычисления среднего угла рассеяния в вакуум всего пучка, налетающего на полубесконечную рассеивающую среду со скошенной границей, воспользуемся соотношением

$$\langle \theta \rangle = \frac{\int \langle \theta \rangle_p(\xi) S(x(\xi), y(\xi)) d\xi}{\int_{\kappa} S(x(\xi), y(\xi)) d\xi}, \quad (17)$$

где интегрирование ведется по всей области изменения параметра  $\kappa$ , а  $S(\xi)$  – плотность распределения зарядов по трубкам тока, получаемая из (10) и (12)

$$S(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (18)$$

Под углом отражения будем понимать, как и в случае угла падения, угол, образованный средним углом рассеяния в вакуум со скошенной границей раздела. С учетом последних трех соотношений имеем для угла отражения

$$\chi = \langle \theta \rangle - \varphi = \frac{1}{2k} + \frac{\sqrt{3}}{\pi k} \int \frac{\exp\left(-\frac{4\xi^2}{3}\right)}{\xi} \frac{1 - \exp\left(-\frac{4\pi k^2 \xi^2}{3} \left(\pi - \frac{1}{2k}\right)\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{2k\xi}{\sqrt{3}} \left(\pi - \frac{1}{2k}\right)\right)} d\xi. \quad (19)$$

Интегрирование в последней формуле ведется по всей области изменения переменной  $\xi$  от нуля до бесконечности. Заметим, что в выражениях как для парциального угла рассеяния в вакуум  $\langle \theta \rangle_p$  (16), так и для угла отражения  $\chi$  (19) не входит параметр  $\Theta_s$ , характеризующий среду и пучок. Таким образом, закон отражения пучка заряженных частиц от рассеивающей среды, связывающий угол падения и угол отражения и выраженный формулой (19), носит универсальный характер.

Зависимость угла отражения пучка заряженных частиц от угла падения на рассеивающую среду, вычисленная по формуле (19), приведена на рис. 2. Эта зависимость носит слабо нелинейный характер. Отметим также, что для 80% отраженных частиц, расположенных в ближней зоне к месту падения пучка, закон отражения близок к линейному, при этом отношение угла отражения к углу падения приблизительно равно 0.9. Это хорошо видно из рис. 2, где изображена рассматриваемая зависимость, вычисленная по формуле (19) с пределами интегрирования от 0.4 до  $\infty$ .

На рис. 2 представлена также зависимость коэффициента отражения от угла падения заряженных частиц на границу раздела рассеивающей среды и вакуума, вычисленная по формуле

$$\Delta(k) = \frac{\int \delta(k, \xi) \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_{\kappa} \exp(-\xi^2) d\xi}, \quad (20)$$

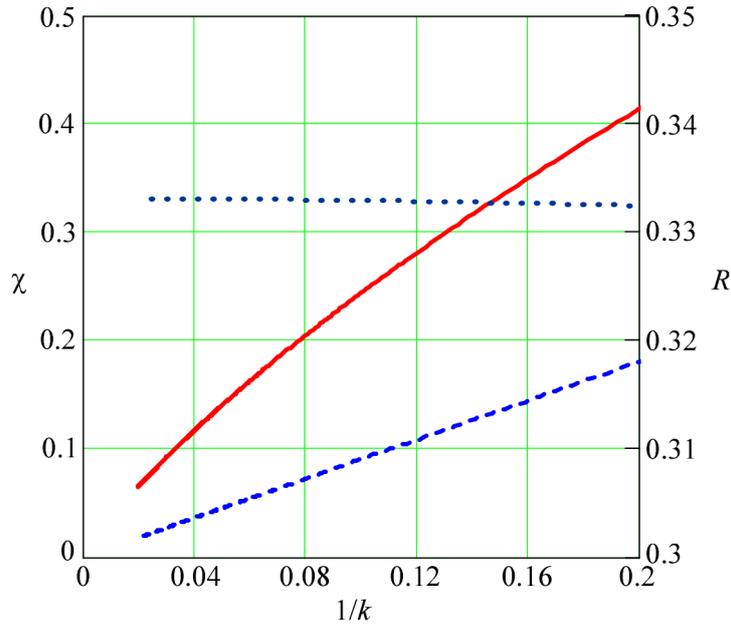


Рис. 2: Зависимости коэффициента отражения  $R$  (точечная линия) и угла  $\chi$  от угла падения  $1/k$  для 100% (сплошная линия) и для 80% (штриховая линия) отраженных частиц.

где  $\delta(k, \kappa)$  – доля частиц в конкретной точке границы раздела, рассеянных в вакуум, от полного числа рассеянных частиц:

$$\delta(k, \kappa) = \frac{\operatorname{erf} \left[ \frac{2k\kappa}{\sqrt{3}} \left( \pi - \frac{1}{2k} \right) \right] + \operatorname{erf} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \right)}{\operatorname{erf} \left[ \frac{2k\kappa}{\sqrt{3}} \left( \pi - \frac{1}{2k} \right) \right] + \operatorname{erf} \left[ \frac{2k\kappa}{\sqrt{3}} \left( \pi + \frac{3}{2k} \right) \right]}. \quad (21)$$

В работе исследован процесс частичного отражения пучка заряженных частиц, налетающих под углом на плоскую границу полубесконечной рассеивающей среды. Использована функция распределения для многократного кулоновского рассеяния и метод линий тока для вычисления среднего угла рассеяния, предложенный в предыдущих работах автора. Показано, что в отличие от закона преломления при наклонном пересечении пучка пластинки вещества закон отражения носит универсальный характер – угол отражения не зависит как от материала среды, так и параметров пучка, а является лишь функцией угла падения. В равной мере это относится и к коэффициенту отражения пучка.

Автор признателен Куракину П. В., соавтору предыдущих работ по данной тематике, за полезные обсуждения и сделанные при этом замечания.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] В. Г. Куракин, П. В. Куракин, ЖТФ **88**(5), 795 (2018). DOI: 10.1134/S1063784218050158.
- [2] В. Г. Куракин, П. В. Куракин, ЖТФ **89**(12), 1843 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219120120.
- [3] В. Г. Куракин, П. В. Куракин, Письма в ЭЧАЯ, № 7 (219), 719 (2018). DOI: 10.1134/S1547477118070464.
- [4] Б. Росси, *Частицы больших энергий*. Перевод с английского (М., ГИТТЛ, 1955), 536 с.

Поступила в редакцию 12 марта 2020 г.

После доработки 26 августа 2021 г.

Принята к публикации 27 августа 2021 г.