УДК 539.184

СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ В МЮОН-ЭЛЕКТРОННЫХ ИОНАХ ЛИТИЯ, БЕРИЛЛИЯ И БОРА

В. И. Коробов[1], А. П. Мартыненко[2], Ф. А. Мартыненко[2], Р. Н. Фаустов[3]

На основе аналитической теории возмущений по постоянной тонкой структуры и отношению масс частиц выполнен расчет сверхтонкой структуры основного состояния в мюон-электронных ионах лития, бериллия и бора. Полученные полные значения сверхтонких расщеплений могут использоваться для сравнения с будущими экспериментальными данными.

Ключевые слова: мюонные ионы, сверхтонкая структура, квантовая электродинамика.

Прецизионная мюонная физика приобрела особо актуальное значение, начиная с 2010 г., когда были получены первые экспериментальные результаты по измерению низколежащих уровней энергии мюонного водорода коллаборацией CREMA (Charge Radius Experiments with Muonic Atoms). Десятилетие активной работы этой коллаборации принесло интересные и неожиданные результаты, относящиеся прежде всего к определению более точных значений зарядовых радиусов легких ядер (протона, дейтрона, гелиона, альфа-частицы) [1]. Новые задачи исследования тонкой и сверхтонкой структуры спектра энергии связаны с мюонными ионами лития, бериллия и др. [2]. Коллаборация J-PARC MUSE [3] планирует измерение сверхтонкой структуры (СТС) основного состояния мюонного гелия с точностью, на два порядка превосходящей точность предыдущих экспериментов 1980-х годов. Все эти уже проведенные и планируемые на ближайшее время эксперименты убедительно показывают, что мюонная физика, а также физика двухчастичных и трехчастичных систем являются в настоящее время актуальной проблемой, требующей соответствующих теоретических исследований и расчетов наблюдаемых величин с высокой точностью [4–7].

[1] ЛТФ ОИЯИ, 141980 Россия, Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6; e-mail: korobov@theor.jinr.ru.
[2] Самарский университет, 443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34.
[3] ИКОИ ФИЦ ИУ РАН, 119333 Россия, Москва, ул. Вавилова, 44.

При теоретическом исследовании уровней энергии трехчастичных систем электрон-мюон-ядро обычно используют два метода. Один из них – вариационный метод, который позволяет находить волновые функции и значения энергий с очень высокой точностью [8, 9]. В основном, теоретические исследования были ориентированы на мюон-электронный гелий, поскольку для него были выполнены измерения СТС основного состояния [10].

Другой аналитический метод расчета уровней энергии таких трехчастичных систем был сформулирован в работах [11] и применен для расчета сверхтонкой структуры спектра и электронного лэмбовского сдвига в [6, 12–14]. Он основан на использовании метода теории возмущений (ТВ) по двум малым параметрам: постоянной тонкой структуры α и отношению масс электрона и мюона. Этот подход имеет определенные преимущества, как и любой другой аналитический метод, но для достижения высокой точности расчета необходимо вычислять многочисленные поправки в старших порядках ТВ.

В нашей предыдущей работе [6] был выполнен расчет электронного лэмбовского сдвига ($2P$–$2S$) и интервала энергии ($2S$–$1S$) в рамках аналитического метода в мюон-электронных ионах лития, бериллия и бора и показано, что полная величина электронного лэмбовского сдвига сильно зависит от заряда ядра, так, что при переходе от ядра лития к ядру бора величина сдвига претерпевает резкое уменьшение в случае ядра бериллия. В данной работе мы продолжаем исследования [6] уровней энергии мюон-электронных ионов лития, бериллия и бора в сверхтонкой части спектра энергии.

Кулоновское взаимодействие частиц в мюон-электронных ионах лития, бериллия и бора приводит к образованию связанных состояний. Их время жизни определяется временем жизни связанного мюона. Массы частиц удовлетворяют неравенству $m_e \ll m_\mu \ll M$, где m_e – масса электрона, m_μ – масса мюона, M – масса ядра. Это приводит к тому, что мюон находится примерно в 200 раз ближе к ядру, чем электрон. Электрон движется в поле квазиядра, которое образуют мюон и ядро. Сверхтонкая структура спектра энергии в основном состоянии возникает при взаимодействии спинов частиц: s_e – спин электрона, s_μ – спин мюона, I – спин ядра. В качестве ядер лития, бериллия и бора далее рассматриваются изотопы со спином ядра $I = 3/2$.

Для расчета уровней энергии методом ТВ разобьем гамильтониан системы на несколько частей, выделив основной вклад кулоновского взаимодействия H_0 в виде:

$$H = H_0 + \Delta H + \Delta H_{\rm rec} + \Delta H_{vp} + \Delta H_{\rm str} + \Delta H_{\rm vert},$$

$$H_0 = -\frac{1}{2M_\mu}\nabla_\mu^2 - \frac{1}{2M_e}\nabla_e^2 - \frac{Z\alpha}{x_\mu} - \frac{(Z-1)\alpha}{x_e}, \tag{1}$$

$$\Delta H = \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e|} - \frac{\alpha}{\mathbf{x}_e},\ \Delta H_{\text{rec}} = -\frac{1}{M}\nabla_\mu \cdot \nabla_e, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_\mu$ и $\mathbf{x}_e$ – радиусы-векторы мюона и электрона относительно ядра, Ze – заряд ядра. Слагаемые $\Delta H_{vp}, \Delta H_{\text{str}}$ и ΔH_{vert} обозначают вклады на поляризацию вакуума, структуру ядра и вершинные поправки. Приведенные массы в подсистемах мюон-ядро, электрон-ядро равны

$$M_\mu = \frac{m_\mu M}{(m_\mu + M)},\ M_e = \frac{m_e M}{(m_e + M)}. \tag{3}$$

В исходном приближении, которое определяется гамильтонианом H_0, волновая функция системы имеет простой аналитический вид

$$\Psi_0(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_\mu) = \psi_{e0}(\mathbf{x}_e)\psi_{\mu0}(\mathbf{x}_\mu) = \frac{1}{\pi}(W_e W_\mu)^{3/2} e^{-W_\mu \mathbf{x}_\mu} e^{-W_e \mathbf{x}_e},$$

$$W_\mu = Z\alpha M_\mu,\ W_e = (Z-1)\alpha M_e, \tag{4}$$

что делает возможным расчет поправок по теории возмущений. Гамильтониан сверхтонкого взаимодействия в случае основного состояния можно представить в виде:

$$\Delta H^{hfs} = \tilde{a}(S_\mu \cdot I) - \tilde{b}(S_e \cdot S_\mu) + \tilde{c}(S_e \cdot I), \tag{5}$$

где коэффициентные функции $\tilde{a}, \tilde{b}$ и $\tilde{c}$ представляются в виде рядов ТВ. В лидирующем порядке эти функции имеют вид:

$$\tilde{a}_0 = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_N g_\mu}{m_p m_\mu}\delta(\mathbf{x}_\mu),\ \tilde{b}_0 = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_\mu g_e}{m_\mu m_e}\delta(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e),\ \tilde{c}_0 = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_N}{m_e m_p}\delta(\mathbf{x}_e), \tag{6}$$

где $g_e = 2(1 + a_e), g_\mu = 2(1 + a_\mu)$ и $g_N = \frac{\mu_N}{I}$ – гиромагнитные факторы электрона, мюона и ядра, μ_N – магнитный момент ядра, $a_{e,\mu}$ – аномальные магнитные моменты электрона и мюона.

Усредняя гамильтониан (5) по волновым функциям основного состояния, получим:

$$v = \langle \Delta H_0^{hfs} \rangle = a\langle I \cdot S_\mu \rangle - b\langle S_\mu \cdot S_e \rangle + c\langle S_e \cdot I \rangle, \tag{7}$$

где a, b, c определяются различными матричными элементами по теории возмущений. В лидирующем порядке получим с помощью (4) следующие вклады в a, b, c:

$$a_0 = \frac{g_N g_\mu}{4}\frac{m_e}{m_p}\left(\frac{W_\mu}{W_e}\right)^3 v_F = \begin{cases} 6.08349 \cdot 10^8 \text{ МГц}, & \mu e_3^7 Li \\ -5.26948 \cdot 10^8 \text{ МГц}, & \mu e_4^9 Be, \\ 23.66123 \cdot 10^8 \text{ МГц}, & \mu e_5^{11} B \end{cases} \quad v_F = \frac{8\alpha W_e^3}{3 m_e m_\mu}, \tag{8}$$

$$b_0 = v_F \frac{g_e g_\mu}{4\left(1+\frac{W_e}{W_\mu}\right)^3} = \begin{cases} 35830.53\,\text{МГц}, & \mu e^7_3 Li \\ 120791.03\,\text{МГц}, & \mu e^9_4 Be, \\ 286127.04\,\text{МГц}, & \mu e^{11}_5 B \end{cases} \quad (9)$$

$$c_0 = v_F \frac{m_\mu}{m_p}\frac{g_e g_N}{4} = \begin{cases} 4422.90\,\text{МГц}, & \mu e^7_3 Li \\ -5397.57\,\text{МГц}, & \mu e^9_4 Be. \\ 29216.41\,\text{МГц}, & \mu e^{11}_5 Be \end{cases}$$

Для вычисления матричных элементов от произведения спиновых операторов используется следующее преобразование базисных волновых функций [15]:

$$\Psi_{S_{N\mu}SS_z} = \sum_{S_{Ne}} (-1)^{S_\mu+I+S_e+S}\sqrt{(2S_{N\mu}+1)(2S_{Ne}+1)} \begin{Bmatrix} S_e & S_N & S_{Ne} \\ S_\mu & S & S_{N\mu} \end{Bmatrix} \Psi_{S_{Ne}SS_z}, \quad (10)$$

где $S_{N\mu}$ – спин мюон-ядерной подсистемы, S_{Ne} – спин электрон-ядерной подсистемы, S – полный спин трехчастичной системы. Свойства $6j$-символов обсуждаются в [15].

Приведенные численные значения основных вкладов в коэффициенты a, b, c показывают, что в системе имеются малые интервалы сверхтонкой структуры, которые определяются величинами b и c. После вычисления среднего значения гамильтониана сверхтонкого взаимодействия ΔH_0^{hfs} в базисе $\psi_{S_{N\mu}SS_z}$ была выполнена диагонализация полученной матрицы энергий и найдены 4 собственных значения энергии, которые определяют сверхтонкую структуру. Поскольку $a \gg b$ и $a \gg c$ можно использовать разложения по $b/a, c/a$ и представить малые интервалы сверхтонкой структуры в виде:

$$\Delta v_1^{hfs} = v_3 - v_4 = \frac{5(b-3c)}{8} + O\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right),$$

$$\Delta v_2^{hfs} = v_2 - v_1 = \frac{3(b+5c)}{8} + O\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right). \quad (11)$$

Как следует из формулы (9), величина b_0 содержит эффекты отдачи по W_e/W_μ в лидирующем порядке по α. Такие же эффекты отдачи возникают и во втором порядке ТВ по ΔH. Вклад в коэффициент b определяется следующим выражением:

$$b_1 = 2\int \Psi^*(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}_\mu)\tilde{b}_0(\mathbf{x}_e-\mathbf{x}_\mu)\tilde{G}(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}_\mu;\mathbf{x}'_e,\mathbf{x}'_\mu)\Delta H(\mathbf{x}'_e,\mathbf{x}'_\mu)\Psi(\mathbf{x}'_e,\mathbf{x}'_\mu)d\mathbf{x}_e d\mathbf{x}_\mu d\mathbf{x}'_e d\mathbf{x}'_\mu, \quad (12)$$

где редуцированная кулоновская функция Грина имеет вид:

$$\tilde{G}(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}_\mu;\mathbf{x}'_e,\mathbf{x}'_\mu) = \sum_{n,n'\neq 0} \frac{\psi_{\mu n}(\mathbf{x}_\mu)\psi_{en'}(\mathbf{x}_e)\psi^*_{\mu n}(\mathbf{x}'_\mu)\psi^*_{en'}(\mathbf{x}'_e)}{E_{\mu 0}+E_{e0}-E_{\mu n}-E_{en'}}. \quad (13)$$

Разделив сумму по мюонным состояниям в (13) на две части с $n = 0$ и $n \neq 0$, получим:

$$b_1(n=0) = \frac{4\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_\mu}{m_e m_\mu}\int |\psi_{\mu 0}(x_3)|^2 \psi^*_{e0}(x_3)\sum_{n'\neq 0}^{\infty}\frac{\psi_{en'}(x_3)\psi^*_{en'}(x_1)}{E_{e0}-E_{en'}}V_\mu(x_1)\psi_{e0}(x_1)dx_1 dx_3, \quad (14)$$

$$V_\mu(x_1) = \int \psi^*_{\mu 0}(x_2)\left[\frac{\alpha}{|x_2-x_1|}-\frac{\alpha}{x_1}\right]\psi_{\mu 0}(x_2)dx_2 = -\frac{\alpha}{x_1}(1+W_\mu x_1)e^{-2W_\mu x_1}. \quad (15)$$

Редуцированная кулоновская функция Грина электрона в (14) имеет вид:

$$G_e(x_1,x_3) = \sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{\psi_{en}(x_3)\psi^*_{en}(x_1)}{E_{e0}-E_{en}} = -\frac{W_e M_e}{\pi}e^{-W_e(x_1+x_3)}\left[\frac{1}{2W_e x_>}-\right.$$

$$\left.-\ln(2W_e x_>)-\ln(2W_e x_<)+Ei(2W_e x_<)+\frac{7}{2}-2C-W_e(x_1+x_3)+\frac{1-e^{2W_e x_<}}{2W_e x_<}\right], \quad (16)$$

где $x_< = \min(x_1,x_3), x_> = \max(x_1,x_3)$, $C = 0.577216\ldots$ – постоянная Эйлера и $Ei(x)$ – интегральная показательная функция. После координатного интегрирования в (14) представим результат в виде разложения по W_e/W_μ:

$$b_1(n=0) = v_F\frac{(1+\alpha_\mu)}{(Z-1)}\left[\frac{1}{8}\frac{W_e}{W_\mu}-\frac{1}{16}\frac{W_e^2}{W_\mu^2}\left(64\ln\frac{W_e}{W_\mu}+64\ln 2+7\right)\right]. \quad (17)$$

Возбужденные состояния мюона ($n \neq 0$) дают вторую часть вклада в b:

$$b_1(n\neq 0) = \frac{4\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_\mu}{m_e m_\mu}\int \psi^*_{\mu 0}(x_3)\psi^*_{e0}(x_3)\sum_{n\neq 0}\psi_{\mu n}(x_3)\psi^*_{\mu n}(x_2)G_e(x_3,x_1,z)\times \quad (18)$$

$$\times\left[\frac{\alpha}{|x_2-x_1|}-\frac{\alpha}{x_1}\right]\psi_{\mu 0}(x_2)\psi_{e0}(x_1)dx_1 dx_2 dx_3,$$

где введена функция Грина электрона

$$G_e(x_3,x_1,z) = \sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\psi_{en'}(x_3)\psi^*_{en'}(x_1)}{z-E_{en'}} = \sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\psi_{en'}(x_3)\psi^*_{en'}(x_1)}{E_{\mu 0}+E_{e0}-E_{\mu n}-E_{en'}}. \quad (19)$$

Слагаемое $(-\alpha/x_1)$ в (18) не дает вклад из-за ортогональности мюонных волновых функций. Заменим приближенно в (16) G_e на свободную функцию Грина [11]:

$$G_e(x_3,x_1,E_{\mu 0}+E_{e0}-E_{\mu n}) \to G_{e0}(x_3-x_1,\ E_{\mu 0}+E_{e0}-E_{\mu n}) =$$

$$= -\frac{M_e}{2\pi}\frac{e^{-\beta|x_3-x_1|}}{|x_3-x_1|}, \quad (20)$$

где $\beta = \sqrt{(2M_e(E_{\mu n} - E_{e0} - E_{\mu 0})}$. Кроме того, заменим приближенно волновые функции электрона в (16) на их значения в нуле ψ_{e0} (0). Опущенные в этом приближении слагаемые могут давать вклад второго порядка по отношению $\dfrac{W_e}{W_\mu}$ в b. Результаты численного интегрирования в [11] с точной функцией Грина электрона в случае мюонного гелия показывают, что опущенные члены в приближении (20) численно малы. После этих приближений интегрирование по координате x_1 дает следующий результат:

$$\int \frac{e^{-\beta|x_3-x_1|}}{|x_3-x_1|}\frac{dx_1}{|x_2-x_1|} = 4\pi\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}|x_3-x_2| + \frac{1}{6}\beta|x_3-x_2|^2 - \frac{\beta^2}{24}|x_3-x_2|^3 + ...\right], \quad (21)$$

где также выполнено разложение $e^{-\beta|x_2-x_3|}$ по $\beta|x_2-x_3|$. Это разложение эквивалентно разложению по степеням $\sqrt{W_e/W_\mu}$. Первый член разложения β^{-1} в (21) не дает вклад в (18). Второй член разложения в (21) дает вклад лидирующего порядка по $\sqrt{W_e/W_\mu}$: $-\dfrac{v_F(1+\alpha_\mu)}{Z-1}\left(\dfrac{35W_e}{8W_\mu} - \dfrac{245W_e^2}{32W_\mu^2}\right)$. Для увеличения точности результата учтем также третье слагаемое в правой части (21), которое приводит к следующему интегралу:

$$\int \psi^*_{\mu 0}(x_3)\sum_n \sqrt{2M_e(E_{\mu n} - E_{\mu 0})}\psi_{\mu n}(x_3)\psi^*_{\mu n}(x_2)(x_2\cdot x_3)\psi_{\mu 0}(x_2)dx_2dx_3 =$$

$$= \sqrt{\frac{W_eZ}{W_\mu^3(Z-1)}}S_{1/2}, \quad (22)$$

где введена следующая величина

$$S_{1/2} = \sum_n \left(\frac{E_{\mu n} - E_{\mu 0}}{R_\mu}\right)^{1/2}\left|\langle \mu 0 \left| \frac{x}{a_\mu} \right| \mu n\rangle\right|^2,\ R_\mu = \frac{1}{2}M_\mu(Z\alpha)^2. \quad (23)$$

В результате вклад (18) принимает вид:

$$b_1(n\neq 0) = \frac{v_F(1+a_\mu)}{Z-1}\left(-\frac{35W_e}{8W_\mu} + \frac{245W_e^2}{32W_\mu^2} + \frac{4}{3}\frac{W_e}{W_\mu}\sqrt{\frac{W_eZ}{W_\mu(Z-1)}}(S^c_{1/2} + S^d_{1/2})\right). \quad (24)$$

Вклад в (24) дают матричные элементы для дискретных и непрерывных состояний:

$$S^d_{1/2} = \sum_n \frac{2^8 n^6(n-1)^{2n-9/2}}{(n+1)^{2n+9/2}} = 1.90695..., \quad (25)$$

$$S^c_{1/2} = \int_0^\infty \frac{2^8kdk}{(k^2+1)^{9/2}(1-e^{-2\pi/k})}\left|\left(\frac{1+ik}{1-ik}\right)^{i/k}\right| = 1.03111.... \quad (26)$$

Складывая поправки на отдачу (17) и (24) во втором порядке ТВ, получим:

$$b_1 = \frac{v_F(1+a_\mu)}{Z-1}\times$$

$$\times\left[-3\frac{W_e}{W_\mu}+\frac{231}{32}\frac{W_e^2}{W_\mu^2}-4\frac{W_e^2}{W_\mu^2}\ln\frac{2W_e}{W_\mu}+\frac{4}{3}\frac{W_e}{W_\mu}\sqrt{\frac{W_eZ}{W_\mu(Z-1)}}\left(S^c_{1/2}+S^d_{1/2}\right)\right]. \quad (27)$$

Численно, поправки на отдачу в (27) составляют 0.4% от основного вклада (9): μe_3^7 Li: –155.58 МГц, μe_4^9 Be: –390.95 МГц, μe_5^{11} B: –738.06 МГц.

Для вычисления аналогичного вклада в c выберем сверхтонкую часть (eN) оператора возмущения в виде (5) в общей формуле типа (18). Используя затем упрощения с дельта-функцией, можно преобразовать поправку на отдачу в c следующим образом:

$$c_1 = \frac{4\pi\alpha}{3}\frac{g_eg_N}{m_em_p}\int\psi^*_{e0}(0)\tilde{G}_e(0,x_1)V_\mu(x_1)\psi_{e0}(x_1)dx_1. \quad (28)$$

Редуцированная кулоновская функция Грина электрона с одним нулевым аргументом есть

$$\tilde{G}_e(0,x) = \sum_{n\neq 0}^{\infty}\frac{\psi_{en}(0)\psi^*_{en}(x)}{E_{e0}-E_{en}} = -\frac{W_eM_e}{\pi}e^{-W_ex}\left[\frac{1}{2W_ex}-\ln 2W_ex+\frac{5}{2}-C-W_ex\right]. \quad (29)$$

В результате аналитического расчета матричных элементов по координатам получим вклад в коэффициент c, который можно представить в виде разложения по W_e/W_μ:

$$c_1 = c_0\frac{2}{(Z-1)}\left[\frac{3W_e}{2W_\mu}+2\frac{W_e^2}{W_\mu^2}\left(\frac{1}{4}-\ln\frac{W_e}{W_\mu}\right)\right] = \begin{cases} 22.27\,\text{МГц}, & \mu e_3^7Li \\ -20.36\,\text{МГц}, & \mu e_4^9Be. \\ 88.11\,\text{МГц}, & \mu e_5^{11}B \end{cases} \quad (30)$$

Используя численные значения для коэффициентов b и c, получаем следующие значения для сверхтонких интервалов (14): $\Delta v_1(\mu e_3^7Li)^+ = 21705.18$ МГц, $\Delta v_1(\mu e_4^9Be)^{2+} = 34861.20$ МГц, $\Delta v_1(\mu e_5^{11}B)^{3+} = 161925.71$ МГц, $\Delta v_2(\mu e_3^7Li)^+ = 13804.26$ МГц, $\Delta v_2(\mu e_4^9Be)^{2+} = 85273.01$ МГц, $\Delta v_2(\mu e_5^{11}B)^{3+} = 123094.94$ МГц. Для определенности результаты приведены с точностью до сотых долей МГц, хотя точность теоретических вычислений не является столь высокой. Для увеличения точности расчета необходимо учесть различные поправки в b и c суммарно второго порядка малости по α и отношению масс частиц. Среди таких поправок в спектрах энергии мюонных атомов важны поправки на поляризацию вакуума, структуру и отдачу ядра, релятивистские и радиационные поправки [5, 6, 16]. Вклад этих поправок в интервалы сверхтонкой структуры составляет порядка 2% от приведенных значений. Их подробный расчет будет представлен в отдельной публикации. Наша оценка теоретической ошибки расчета интервалов сверхтонкой структуры составляет для лития 0.13 МГц, бериллия – 0.56 МГц, бора – 1.53 МГц. Она связана с вкладами порядка $v_F \left(\frac{W_e}{W_\mu}\right)^{5/2} \ln \frac{W_e}{W_\mu}$, которые в наших расчетах учитываются не полностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики Базис (грант No. 19-1-5-67-1 Ф.А.М.).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] A. Antognini, F. Kottmann and R. Pohl, SciPost Phys. Proc. **5**, 021 (2021). DOI: 10.21468/SciPostPhysProc.5.021.

[2] S. Schmidt, M. Willig, J. Haack, et al., J. Phys.: Conf. Ser. **1138**, 012010 (2018). DOI: 10.1088/1742-6596/1138/1/012010.

[3] P. Strasser, K. Shimomura, and H. A. Torii, JPS Conf. Proc. **21**, 011045 (2018). DOI: 10.7566/JPSCP.21.011045.

[4] A. E. Dorokhov et al., Int. J. Mod. Phys. A **36**, 04, 2150022 (2021). DOI: 10.1142/S0217751X21500226.

[5] A. A. Krutov et al., Phys. Rev. A **94**, 062505 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.94.062505.

[6] A. E. Dorokhov et al., Phys. Rev. A **103**, 052806 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevA.103.052806.

[7] R. N. Faustov et al., Phys. Rev. A **92**, 052512 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.92.052512.

[8] A. M. Frolov, Phys. Rev. A **61**, 022509 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevA.61.022509.

[9] A. V. Eskin et al., J. Phys. Conf. Ser. **1690**, 012092 (2020). DOI: 10.1088/1742-6596/1690/1/012092.

[10] C. J. Gardner, A. Badertscher, W. Beer, et al., Phys. Rev. Lett. **48**, 1168 (1982). DOI: 10.1103/PhysRevLett.48.1168.

[11] S. D. Lakdawala and P. Mohr, Phys. Rev. A **22**, 1572 (1980). DOI: 10.1103/PhysRevA.22.1572.

[12] V. L. Yakhontov and M. Ya. Amusia, J. Phys. B **16**, L71 (1983). DOI: 10.1088/0022-3700/16/3/007.

[13] A. A. Krutov and A. P. Martynenko, Phys. Rev. A **78**, 032513 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevA.78.032513

[14] S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and V. I. Korobov, Phys. Rev. A **97**, 022504 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.97.022504.

[15] И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров* (М., Физматлит, 1963).

[16] A. A. Krutov et al., J. Exp. Theor. Phys. **120**, 73 (2015). DOI: 10.7868/S004445101501006X.

Поступила в редакцию 2 марта 2022 г.

После доработки 21 апреля 2022 г.

Принята к публикации 22 апреля 2022 г.