УДК 533.95

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНДУЦИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

С. А. Белов[1,2], С. Ю. Пичугин[1]

Используя теорию возмущений с точностью до членов второго порядка малости, произведен вывод уравнений, описывающих распространение альфвеновских волн в частично ионизованной плазме. Показано, что альфвеновская волна нелинейно индуцирует возмущения плотностей ионной и нейтральной компонент плазмы.

Ключевые слова: альфвеновские волны, частично ионизованная двухжидкостная плазма, нелинейное индуцирование возмущений.

Ранее в ряде работ, в частности в [1–3], было исследовано распространение нелинейных альфвеновских волн в полностью ионизованной плазме. Для различных астрофизических приложений представляет интерес анализ динамики альфвеновских и магнитоакустических волн в частично ионизованной (ЧИ) плазме [4–8]. В [4–8] исследования проводились в линейном приближении, причем в [5-8] использовалась так называемая двухжидкостная модель, в которой плазма может быть представлена как смесь двух компонент – ионной и нейтральной, где ионная компонента объединяет электроны и ионы. В настоящей работе на основе двухжидкостной модели производится вывод уравнений в нелинейном приближении, описывающих распространение альфвеновских волн и индуцирование ими акустических возмущений в ЧИ плазме.

Исходная система магнитогазодинамических уравнений в ЧИ двухжидкостной плазме выглядит следующим образом [5, 7]:

$$\rho_i\left(\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial t}+\vec{V}_i\nabla\vec{V}_i\right)=-\nabla P_i-\alpha_{in}(\vec{V}_i-\vec{V}_n)-\frac{1}{4\pi}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B}),\ \frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\nabla(\rho_i\vec{V}_i)=0,$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\nabla\times(\vec{V}_i\times\vec{B}),\ \nabla\vec{B}=0,$$

[1] Самарский филиал ФИАН, 443011 Россия, Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

[2] Самарский университет, 443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34; e-mail: theor@fian.smr.ru.

$$C_{Vi}\rho_i\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+\vec{V}_i\nabla T_i\right)-\frac{k_BT_i}{m_i}\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\vec{V}_i\nabla\rho_i\right)=0,\ P_i=\frac{k_BT_i\rho_i}{m_i};$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial\vec{V}_n}{\partial t}+\vec{V}_n\nabla\vec{V}_n\right)=-\nabla P_n-\alpha_{in}(\vec{V}_n-\vec{V}_i),\ \frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\nabla(\rho_n\vec{V}_n)=0,$$

$$C_{V\leftrightarrow n}\rho_n\left(\frac{\partial T_n}{\partial t}+\vec{V}_n\nabla T_n\right)-\frac{k_BT_n}{m_n}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\vec{V}_n\nabla\rho_n\right)=0,\ P_n=\frac{k_BT_n\rho_n}{m_n}. \tag{1}$$

В (1) переменные с индексом i – это параметры электронно-ионной компоненты, а переменные с индексом n – параметры нейтральной компоненты; ρ, T, P – плотность, температура и давление соответственно; $\vec{V}, \vec{B}$ – вектора скорости и индукции магнитного поля; k_B – постоянная Больцмана; C_{Vi}, C_{Vn} – теплоёмкости при постоянном объёме; m_i, m_n – средние молекулярные массы; α_{in} – коэффициент трения между ионами и нейтралами, причем $\alpha_{in}=\Omega_{in}\rho_i\rho_n$, – где Ω_{in} – константа скорости соударений на единицу массы. При записи уравнений (1) пренебрегалось влиянием диссипативных процессов, обусловленных наличием вязкости, конечной проводимости и теплопроводности.

Рассмотрим линейно-поляризованную по оси x альфвеновскую волну, распространяющуюся вдоль внешнего магнитного поля с вектором индукции $\vec{B}_0$, направленным вдоль оси z. Тогда, пренебрегая зависимостью переменных от координат x и y, систему уравнений (1) можно записать в следующем виде:

$$\rho_i\left(\frac{\partial V_{ix}}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial V_{ix}}{\partial z}\right)=\frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial B_x}{\partial z}-\alpha_{in}(V_{ix}-V_{nx}), \tag{2}$$

$$\rho_i\left(\frac{\partial V_{iz}}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial V_{iz}}{\partial z}\right)=-\frac{k_B}{m_i}\left(\rho_i\frac{\partial T_i}{\partial z}+T_i\frac{\partial\rho_i}{\partial z}\right)-\frac{B_x}{4\pi}\frac{\partial B_x}{\partial z}-\alpha_{in}(V_{iz}-V_{nz}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_iV_{iz})}{\partial z}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=-\frac{\partial(V_{iz}B_x)}{\partial z}+B_0\frac{\partial V_{iz}}{\partial z}, \tag{5}$$

$$C_{Vi}\rho_i\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial T_i}{\partial z}\right)-\frac{k_BT_i}{m_i}\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial\rho_i}{\partial z}\right)=0, \tag{6}$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial V_{nx}}{\partial t}+V_{nz}\frac{\partial V_{nx}}{\partial z}\right)=\alpha_{in}(V_{ix}-V_{nx}), \tag{7}$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial V_{nz}}{\partial t}+V_{nz}\frac{\partial V_{nz}}{\partial z}\right)=-\frac{k_B}{m_n}\left(\rho_n\frac{\partial T_n}{\partial z}+T_n\frac{\partial\rho_n}{\partial z}\right)+\alpha_{in}(V_{iz}-V_{nz}), \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_n V_{nz})}{\partial z} = 0, \tag{9}$$

$$C_{Vn}\rho_n\left(\frac{\partial T_n}{\partial t} + V_{nz}\frac{\partial T_n}{\partial z}\right) - \frac{k_B T_n}{m_n}\left(\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + V_{nz}\frac{\partial \rho_n}{\partial z}\right) = 0. \tag{10}$$

Для получения уравнений, описывающих распространение альфвеновской волны в ЧИ плазме, используем теорию возмущений и ограничимся рассмотрением величин вплоть до второго порядка малости по параметру $\varepsilon \ll 1$, представляющему собой относительную амплитуду возмущения в волне. Полагаем, что в начальный момент среда не движется. Запишем следующие разложения:

$$\rho_i = \rho_{i0} + \rho_{i1} + \rho_{i2},\ \rho_n = \rho_{n0} + \rho_{n1} + \rho_{n2},\ \vec{V}_{i\leftrightarrow} = \vec{V}_{i1} + \vec{V}_{i2},\ \vec{V}_{n\leftrightarrow} = \vec{V}_{n1} + \vec{V}_{n2},$$

$$T_i = T_{i0} + T_{i1} + T_{i2},\ T_n = T_{n0} + T_{n1} + T_{n2},\ B_x = B_{x1} + B_{x2}, \tag{11}$$

$$\rho_{i1,n1}/\rho_{i0,n0} \sim T_{i1,n1}/T_{i0,n0} \sim |\vec{V}_{i1}|/c_i \sim |\vec{V}_{n1}|/c_n \sim B_{x1}/B_0 \sim \varepsilon,$$

$$\rho_{i2,n2}/\rho_{i0,n0} \sim T_{i2,n2}/T_{i0,n0} \sim |\vec{V}_{i2}|/c_i \sim |\vec{V}_{n2}|/c_n \sim B_{x2}/B_0 \sim \varepsilon^2,$$

c_i, c_n – скорости звука (см. ниже). Если теперь подставить выражения (11) в уравнения (2)–(10) и ограничиться только членами первого порядка малости, то можно получить следующие линейные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial t^2} - c_A^2\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial z^2}\right) = \nu_0\left(\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial t^2} - V_A^2\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{i1}}{\partial t^2} - c_i^2\frac{\partial^2 \rho_{i1}}{\partial z^2} + (1-\eta)\nu_0\frac{\partial \rho_{i1}}{\partial t} - \eta\nu_0\frac{\partial \rho_{n1}}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{n1}}{\partial t^2} - c_n^2\frac{\partial^2 \rho_{n1}}{\partial z^2} + (1-\eta)\nu_0\frac{\partial \rho_{i1}}{\partial t} + \eta\nu_0\frac{\partial \rho_{n1}}{\partial t} = 0. \tag{14}$$

Где $\nu_0 = \Omega_{in}\rho_0$, $\rho_0 = \rho_{i0} + \rho_{n0}$, $V_A^2 = \dfrac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$, $c_A^2 = \dfrac{B_0^2}{4\pi\rho_{i0}} = \dfrac{V_A^2}{\eta}$, $c_i^2 = \gamma\dfrac{k_B T_{i0}}{m_i}$, $c_n^2 = \gamma\dfrac{k_B T_{n0}}{m_n}$, $\gamma = \dfrac{C_{Pi}}{V_{Vi}} = \dfrac{C_{Pn}}{C_{Vn}}$.

Здесь величины $C_{Pi} = C_{Vi} + k_B/m_i$, $C_{Pn} = C_{Vn} + k_B/m_n$ – теплоёмкости ионной и нейтральной компоненты при постоянном давлении; c_i, c_n – скорости звука в ионной и нейтральной компоненте; V_A – низкочастотная скорость альфвеновской волны; $\eta = \rho_{i0}/\rho_0$ – степень ионизации плазмы.

Независимость уравнения (12) от уравнений (13), (14) означает, что альфвеновские волны и возмущения плотностей ионной и нейтральной компонент независимы в линейном приближении. Таким образом, если ЧИ плазма не была изначально акустически возмущена, то распространение альфвеновских волн не приводит к появлению в ней акустических возмущений первого порядка, т. е. можно положить, что $\rho_{i1}, \rho_{n1}, T_{i1}, T_{n1}, V_{iz1}, V_{nz1} = 0\,(V_{ix1}, V_{nx1}, B_{x1} \neq 0)$. С учетом этого факта уравнения (2)–(10) во втором порядке малости можно свести к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial t^2} - c_A^2\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial z^2}\right) + \nu_0\left(\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial t^2} - V_A^2\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{i2}}{\partial t^2} - c_i^2\frac{\partial^2 \rho_{i2}}{\partial z^2} + (1-\eta)\nu_0\frac{\partial \rho_{i2}}{\partial t} - \eta\nu_0\frac{\partial \rho_{n2}}{\partial t} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2 B_{x1}^2}{\partial z^2} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_{n2}}{\partial t^2} - c_n^2\frac{\partial^2 \rho_{n2}}{\partial z^2} - (1-\eta)\nu_0\frac{\partial \rho_{i2}}{\partial t} + \eta\nu_0\frac{\partial \rho_{n2}}{\partial t} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (16) показывает, что альфвеновская волна нелинейно воздействует на акустические возмущения ρ_{i2} и ρ_{n2} через возмущения магнитного давления $B_{x1}^2/8\pi = B_x^2/8\pi$. В то же время из (15) – (17) видно, что акустические возмущения второго порядка малости не влияют на возмущения B_{x2} в альфвеновской волне. Суммируя уравнения (12) и (15), можно получить следующее уравнение, описывающее распространение альфвеновской волны в ЧИ плазме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - c_A^2\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\right) + \nu_0\left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - V_A^2\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{18}$$

Видно, что в рассматриваемом приближении распространение альфвеновской волны в ЧИ плазме описывается линейным уравнением (18), и при этом альфвеновская волна индуцирует возмущения плотностей ионной и нейтральной компонент благодаря градиенту магнитного давления $B_x^2/8\pi$.

Представим решения уравнения (18) в виде

$$B_x = A_B \exp(-i\omega t + ikz), \tag{19}$$

где $\omega = \omega_R - i\omega_1, k$ – действительно. При этом ω_R – частота альфвеновской волны, ω_I – временной декремент затухания, k – волновое число. Подстановка в (18) выражения (19) позволяет получить дисперсионное соотношение для альфвеновских волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в ЧИ плазме:

$$\omega\left(\frac{\omega^2}{k^2} - c_A^2\right) + i\nu_0\left(\frac{\omega^2}{k^2} - V_A^2\right) = 0. \tag{20}$$

Это соотношение эквивалентно дисперсионному соотношению, полученному в линейном приближении в работе [4]. Решение уравнения (20) в низкочастотном диапазоне, где $\omega_R \ll \eta\nu_0$, имеет вид

$$\omega = kV_A - i\frac{k^2V_A^2(1-\eta)}{2\nu_0\eta}. \qquad (21)$$

Таким образом, при $\omega_R \ll \eta\nu_0$ альфвеновские волны в ЧИ плазме распространяются со скоростью $V_A = \omega_R/k$ с декрементом затухания, обусловленным ионно-нейтральными столкновениями, $\omega_I = \omega_R^2(1-\eta)/2\eta\nu_0$.

Если поперечная компонента магнитного поля B_x в ЧИ плазме эволюционирует в соответствии с выражением $B_x = A_B\exp(-\omega_I t)\sin(-\omega_R t + kz)$, то член, описывающий индуцирование возмущений плотностей в (16), будет иметь вид:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2 B_x^2}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi}A_B^2k^2\exp(-2\omega_I t)\cos(-2\omega_R t + 2kz) = \frac{1}{4\pi}A_B^2k^2\mathrm{Re}\left[\exp(-2i\omega t + 2ikz)\right].$$

В соответствии с этим представим частные решения уравнений (16), (17) в виде

$$\rho_{i2} = \mathrm{Re}\left\{A_i[1-\exp(-2i\omega t + 2ikz)]\right\},\ \rho_{n2} = \mathrm{Re}\left\{A_n[1-\exp(-2i\omega t + 2ikz)]\right\}. \qquad (22)$$

В области низких частот, где $\omega_R \ll \eta\nu_0$, уравнения (16), (17) можно свести к уравнению для возмущения суммарной плотности плазмы $\rho_2 = \rho_{i2} + \rho_{n2}$, причем $\rho_{i2} = \eta\rho_2$, $\rho_{n2} = (1-\eta)\rho_2$:

$$\frac{\partial^2\rho_2}{\partial t^2} - c_M^2\frac{\partial^2\rho_2}{\partial z^2} = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2 B_x^2}{\partial z^2}. \qquad (23)$$

Здесь $c_M^2 = \eta c_i^2 + (1-\eta)c_n^2$, c_M – низкочастотная (модифицированная) скорость звука в ЧИ плазме. Если подставить в (23) выражения (22), то можно получить следующее частное решение уравнения (23), описывающее акустические возмущения, индуцированные альфвеновской волной в ЧИ плазме и распространяющиеся со скоростью V_A:

$$\rho_2(t,z) = \mathrm{Re}\left\{A(k)\left[1-\exp\left(-\frac{k^2V_A^2(1-\eta)t}{\nu_0\eta}\right)\exp[2ik(-V_At + z)]\right]\right\}, \qquad (24)$$

где $A(k) = \dfrac{A_B^2}{16\pi[V_A^2 - c_M^2 - ikV_A^3(1-\eta)/\eta\nu_0]}$. При этом мы воспользовались выражением (21), справедливым в рассматриваемой низкочастотной области. Как видно из выражения (24), при распространении в ЧИ плазме альфвеновской волны с частотой ω_R в ионной и нейтральной компонентах плазмы одновременно могут возникать периодические возмущения с частотой $2\omega_R$, испытывающие затухание вследствие ионно-нейтральных столкновений. В полностью ионизованной плазме (24) примет вид

$$\rho_2(t,z) = \frac{A_B^2}{16\pi(V_A^2 - c_i^2)}\{1-\cos[2\omega_R(-t + z/V_A)]\}.$$

Из этого выражения получается аналитическое решение (33) в [1] для возмущений продольной скорости, индуцированных альфвеновской волной.

Таким образом, в настоящей работе проведено исследование альфвеновских волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в ЧИ плазме. На основе двухжидкостной модели с точностью до членов второго порядка малости произведен вывод уравнений для поперечной компоненты магнитного поля и возмущений плотностей ионной и нейтральной компонент плазмы. Выяснено, что при распространении альфвеновских волн в ЧИ плазме происходит нелинейное индуцирование акустических возмущений второго порядка малости в обеих компонентах плазмы. Эти периодические возмущения будут иметь частоту, вдвое превышающей частоту альфвеновской волны.

Работа частично поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (государственные задания по темам 0023-2019-0003, FSSS-2020-0014).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] J. F. McLaughlin, I. De Moortel, A. W. Hood, Astronomy & Astrophysics **527**, A149 (2011). DOI: 10.1051/0004-6361/201015552.

[2] S. A. Belov, S. A. Molevich, D. I. Zavershinsky, Phys. Scr. **94**(10), 105605 (2019). DOI: 10.1088/1402-4896/ab2f02.

[3] S. Belov, N. Molevich, D. Zavershinsky, Solar Physics **295**, 160 (2020). DOI: 10.1007/s11207-020-01726-9.

[4] P. Forteza, R. Oliver, J. L. Ballester, M. L. Khodachenko, Astronomy & Astrophysics **461**, 731 (2007). DOI: 10.1051/0004-6361:20065900.

[5] T. V. Zagarashvili, M. L. Khodachenko, H. O. Rucker, Astronomy & Astrophysics **529**, A82 (2011). DOI: 10.1051/0004-6361/201016326.

[6] J. L. Ballester, I. Alexeev, M. Collados, et al., Space Sci. Rev. **214**, 58 (2018). DOI: 10.1007/s11214-018-0485-6.

[7] N. E. Molevich, S. Yu. Pichugin, D. S. Ryashchikov, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **47**(8), 252 (2020). DOI: 10.3103/S1068335620080072.

[8] N. E. Molevich, S. Yu. Pichugin, D. S. Ryashchikov, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **48**(7), 20 (2021). DOI: 10.3103/S1068335621070046.

Поступила в редакцию 16 июня 2022 г.

После доработки 10 сентября 2022 г.

Принята к публикации 16 сентября 2022 г.