

СКОРОСТЬ РОСТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ГАЛАКТИЧЕСКОМ ДИСКЕ В РАЗЛИЧНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Е. А. Михайлов¹⁻³

Большое количество галактик обладает регулярными магнитными полями, которые с теоретической точки описываются с помощью механизма динамо. Оценить возможность генерации поля и скорость его роста можно с помощью решения задачи на собственные значения. В случае тонких дисков можно использовать так называемое планарное приближение, в рамках которого собственные значения могут быть найдены точно. В то же время, в случае рассмотрения толстых дисков в уравнениях возникают дополнительные слагаемые, вклад которых учтен с помощью теории возмущений.

Ключевые слова: магнитное поле, галактики, собственные значения, динамо, теория возмущений.

Введение. В настоящее время практически не вызывает сомнений, что большое число спиральных галактик обладают регулярными структурами магнитного поля [1, 2]. Первые наблюдательные свидетельства были связаны с изучением космических лучей в нашей галактике в середине прошлого века [3]. Другие важные подтверждения были связаны с исследованием спектра синхротронного излучения, которое может быть объяснено только если мы принимаем во внимание магнитные поля в межзвездной среде [4]. На протяжении последних десятилетий большинство наблюдательных исследований галактических магнитных полей ведется с помощью так называемого фарадеевского вращения [5, 6]. В настоящее время есть данные о порядка 10^3 источников, что позволяет нам не только делать простые оценки, но и исследовать детальную струк-

¹ ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.

² МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

³ Сколковский институт науки и технологий, 121205 Россия, Москва, Сколково, Большой бульвар, д. 30, стр. 1.

туру галактического поля [7]. Для других галактик используются внегалактические источники, которые дают нам возможность исследовать свои магнитные поля [8–10].

С теоретической точки зрения, магнитные поля обычно исследуются с помощью механизма динамо [4, 11]. Он основан на совместном действии дифференциального вращения (которое связано с нетвердотельным движением среды в галактике) и альфа-эффекта (показывает спиральность турбулентности в межзвездном газе). Им противодействует турбулентная диффузия, которая стремится разрушить регулярные структуры. Таким образом, генерация поля – пороговый процесс и оно может увеличиваться только в случае, если действие динамо более интенсивно, чем диссипативные процессы [2]. Это крайне важно для понимания типичных значений управляющих параметров, которые могут показать возможность роста магнитного поля.

Галактическое динамо описывается с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Они могут ассоциироваться с линейными операторами, собственные значения в которых будут характеризовать скорость роста магнитного поля и возможность его генерации. Если все собственные значения будут отрицательными, магнитное поле может лишь затухать. Это может быть выражено с помощью динамо-числа, которое включает все процессы (альфа-эффект, дифференциальное вращение и турбулентную диффузию). Если мы изучаем магнитные поля в тонком диске, возможно использовать планарное приближение, которое было развито Моссом, Местелем, Субраманианом и другими авторами [12–14]. Оно принимает во внимание, что диск имеет малую полутолщину, и мы можем рассматривать только две компоненты магнитного поля. Процесс генерации магнитного поля тесно связан с собственными значениями соответствующего дифференциального оператора. Первые исследования в этом направлении велись еще несколько десятилетий назад [10]. Отметим, что в соответствующих работах применяются подходы, разработанные в квантовой механике, такие как адиабатическое приближение и метод ВКБ [15, 16]. Собственные функции могут быть построены с использованием функций Бесселя, а собственные значения ассоциируются с ее нулями [17, 18]. Мы можем получить вполне прозрачные оценки для динамо-числа и определить, может ли в таком случае расти магнитное поле.

Тем не менее, если галактический диск достаточно толстый, мы уже не можем пользоваться данными соображениями. При этом, подобные объекты связаны с некоторыми специфическими типами галактик и другими астрофизическими объектами, имеющими форму диска (напр., аккреционными дисками). Один из возможных способов исследовать вертикальную структуру поля связан с применением так называемой rz -модели

[19, 20]. Она описывает магнитное поле с помощью двух функций: азимутального поля и азимутальной компоненты векторного потенциала магнитного поля. Задача на собственные значения в таком случае будет заметно более сложной и уже не может, по-видимому, быть решена точно. Тем не менее, мы можем взять приближенное уравнение, учитывающее лишь азимутальную компоненту поля. Подобная задача также не решается точно. В данной работе для этого уравнения предложен подход, связанный с применением первого порядка теории возмущений, хорошо известной в квантовой механике. Ранее для одномерного уравнения, описывающего принципиальные особенности магнитного поля в диске, использовались другие методы.

Собственные значения в случае тонких дисков. Генерация магнитного поля в случае тонких дисков описывается в рамках планарного приближения (также известного в литературе как *no-z* модель). Оно принимает во внимание тот факт, что поле лежит в основном в плоскости диска, и поэтому можно решать задачу лишь для азимутальной и радиальной компонент магнитного поля, уравнения для которых выглядят так (времена измеряются в единицах $\frac{h^2}{\eta}$, где η – коэффициент турбулентной диффузии, а расстояния – в единицах радиуса галактики R):

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -R_\alpha B_\varphi - \frac{\pi^2}{4\pi^2} B_r + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{\partial B_r}{r \partial r} - \frac{B_r}{r^2} \right);$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -R_\omega B_r - \frac{\pi^2}{4\pi^2} B_\varphi + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial B_\varphi}{r \partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right);$$

где R_α характеризует закрученность турбулентных движений (альфа-эффект), R_ω – дифференциальное вращение, $\lambda = \frac{h}{R}$ – диффузию в плоскости диска [13, 14]. Если учесть [15], что для растущих решений выполняется равенство $B_\varphi = - \left(\frac{R_\omega}{R_\alpha} \right)^{1/2} B_r$, то можно решать задачу лишь для азимутальной компоненты магнитного поля:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = D^{1/2} B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial B_\varphi}{r \partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right);$$

где $D = R_\alpha R_\omega$ – так называемое динамическое число, которое характеризует интенсивность действия динамо.

В качестве граничных условий мы имеем следующее:

$$B_\varphi|_{r=0} = B_\varphi|_{r=1} = 0.$$

Будем искать решение в форме $B_\varphi(r, t) = B_\varphi(r) \exp(\gamma t)$. Тогда все сведется к решению задачи на собственные значения:

$$\gamma B_\varphi = D^{1/2} B_\varphi - \frac{\pi^2}{4} B_\varphi + \lambda^2 \left(\frac{d^2 B_\varphi}{dr^2} + \frac{dB_\varphi}{r dr} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right).$$

Собственные функции будут представляться с помощью функций Бесселя первого порядка [17]:

$$B_{\varphi, n}(r) = J_1(j_{1, n} r);$$

где $j_{1, n}$ – их корни, определяемые из соотношения $J_1(j_{1, n}) = 0$. Для собственных значений мы получим [17]:

$$\gamma_n = D^{1/2} - \frac{\pi^2}{4} - \lambda^2 j_{1, n}^2.$$

Критерием роста магнитного поля является положительность старшего собственного значения. Это достигается при значениях динамочисла $D > D_{cr}$. Если мы возьмем значение $\lambda = 0.05$, то можно получить для критического динамочисла $D_{cr} \approx 7$ [2, 17].

Собственные значения в модели с учетом вертикальных потоков. Если мы рассматриваем “толстые” диски, нам необходимо принимать во внимание более сложную вертикальную структуру магнитного поля. В таком случае удобно представить его в виде следующей комбинации:

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{rot}(A \mathbf{e}_\varphi),$$

где B – азимутальное магнитное поле, A – азимутальная составляющая векторного потенциала, \mathbf{e}_φ – единичный вектор, имеющий азимутальное направление. Используя те же безразмерные единицы, мы можем записать следующую систему уравнений [20, 21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= R_\alpha z B + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial A}{r \partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= R_\omega \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial B}{r \partial r} - \frac{B}{r^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Удобно ввести новую функцию $Q = \frac{\partial A}{\partial z}$, соответствующую радиальной компоненте магнитного поля, взятой с обратным знаком. Также можно учесть по аналогии с предшествующей моделью, что по мере роста магнитного поля приближенно выполняется соотношение $B = Q R_\alpha^{-1/2} R_\omega^{1/2}$. Наконец, можно принять во внимание, что вторая производная по переменной z заметно превышает все остальные слагаемые в операторе Лапласа. Тогда уравнение для Q будет следующим:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = D^{1/2} Q + D^{1/2} z \frac{\partial Q}{\partial z} + \lambda^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}.$$

В качестве граничных условий можно выбрать следующие:

$$Q|_{z=-\lambda} = Q|_{z=\lambda} = 0.$$

Если мы предполагаем, что магнитное поле растет по закону $\exp(\gamma t)$, то все вновь сведется к задаче на собственные значения:

$$\gamma Q = \hat{H}Q + \hat{V}Q,$$

где $\hat{H} = D^{1/2} + \lambda^2 \frac{d^2}{dz^2}$ и $\hat{V} = D^{1/2} z \frac{d}{dz}$.

Для решения задачи мы используем методы теории возмущений, хорошо известной в квантовой механике. В данной работе предлагается провести аналогию с одномерным уравнением для магнитного поля и вычислить таким образом значение скорости экспоненциального роста поля. Сначала получим решение невозмущенной задачи:

$$\bar{\gamma}Q = \hat{H}Q.$$

Ее собственные значения будут выглядеть следующим образом:

$$\bar{\gamma}_n = D^{1/2} - \frac{\pi^2 n^2}{4}.$$

Нормированные собственные функции (мы используем норму в пространстве $L_2[-\lambda, +\lambda]$) будут записываться так:

$$Q_n(z) = \lambda^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi n(z - \lambda)}{2\lambda}\right).$$

Собственные значения для возмущенной задачи можно представить с помощью следующей формулы:

$$\gamma_n \cong \bar{\gamma}_n + \Delta\gamma_n.$$

Возмущение для собственного значения будет представляться в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_n &= \int_{-\lambda}^{+\lambda} Q_n(z) \hat{V} Q_n(z) dz = \\ &= -\frac{\pi n D^{1/2+\lambda}}{2\lambda^2} \int_{-\lambda}^{+\lambda} z \cos\left(\frac{\pi n(z - \lambda)}{2\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi n(z - \lambda)}{2\lambda}\right) dz = \frac{D^{1/2}(-1)^n}{2}. \end{aligned}$$

Собственные значения будут выглядеть так:

$$\gamma_n \cong D^{1/2} - \frac{\pi^2 n^2}{4} + \frac{D^{1/2}(-1)^n}{2}.$$

Старшее собственное значение будет следующим:

$$\gamma_1 \cong -\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}D^{1/2}.$$

Оно будет положительным в случае, если $D > D_{cr}$, где

$$D_{cr} \cong \frac{\pi^4}{4} \approx 24.$$

Можно видеть, что данное критическое значение намного выше, чем то, что было получено для тонких дисков.

Сравнение с численным решением задачи. С целью оценки степени точности даваемых приближений мы также построили (см. рис. 1) численное решение систем уравнений, описывающих эволюцию магнитного поля в случае тонкого и толстого диска. Отметим, что для больших времен решение должно вести себя согласно экспоненциальному закону, где показатель экспоненты соответствует старшему собственному значению γ_1 . Для сравнения на графике также указаны функции, соответствующие $B_0 \exp(\gamma_1 t)$.

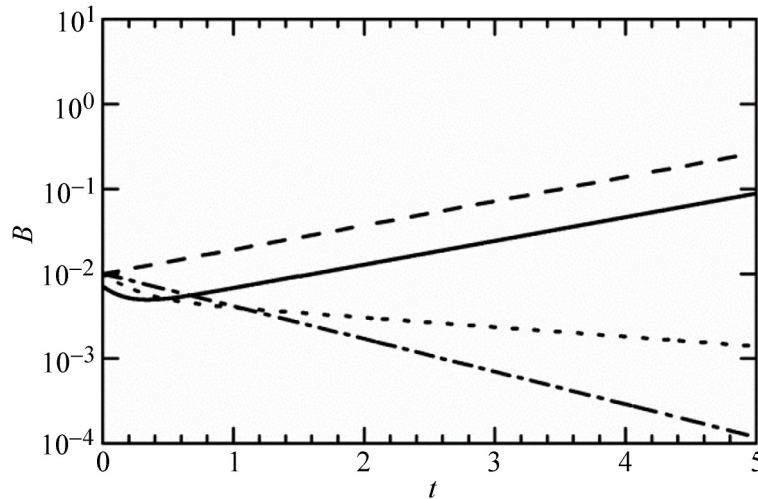


Рис. 1: Эволюция магнитного поля при $D = 10$. Сплошная линия показывает численный результат для планарного приближения, пунктирная – теоретические оценки в рамках планарного приближения, штриховая – численный результат для rz -модели, штрихпунктирная – теоретические оценки в рамках rz -модели.

Можно видеть, что в случае планарного приближения магнитное поле растет в соответствии с теоретическими ожиданиями (отличаясь на больших временах на постоянный множитель, который обусловлен выходом на старшую моду). В то же время соответствие в случае модели толстого диска (для данного случая речь идет о затухании) они соотносятся несколько хуже.

Заключение. Мы исследовали эволюцию магнитного поля с использованием различных моделей для магнитного поля. Планарное приближение может быть использовано для исследования магнитного поля в тонком диске и rz -модель удобна для толстых дисков. Нами были решены приближенные задачи на собственные значения в рамках этих моделей. Отметим, что в случае планарного приближения полученные условия для роста магнитного поля с большой точностью соответствуют как численным результатам, так и данным наблюдений [17]. Кроме того, важно отметить, что грубая модель, рассматривающая лишь одну компоненту для магнитного поля, позволяет получить собственные значения, практически не отличающиеся от более сложных моделей. Можно предполагать определенное математическое значение результатов для данного приближения: методы, используемые в квантовой механике для вычисления спектра оператора Гамильтона, были использованы для нахождения собственных значений в принципиально иной физической задаче. В то же время, численные расчеты для rz -модели показывают, что хотя порог генерации будет выше, чем для планарного приближения, он составляет меньшие значения, нежели полученные нами оценки [21]. Это говорит о том, что для толстых дисков могут быть эффективны более сложные модели, учитывающие другие факторы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-72-30028).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, et al., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 155 (1996). DOI: 10.1146/annurev.astro.34.1.155.
- [2] T. Arshakian, R. Beck, M. Krause, D. Sokoloff, *Astron. Astrophys.* **494**(1), 21 (2009). DOI: 10.1051/0004-6361:200810964.
- [3] E. Fermi, *Phys. Rev.* **75**(8), 1169 (1949). DOI: 10.1103/PhysRev.75.1169.
- [4] Я. Б. Зельдович, А. А. РuzмаЙкин, Д. Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике* (НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Москва – Ижевск, 2006).
- [5] R. Manchester, *Astrophysical Journal* **172**, 43 (1972). DOI: 10.1086/151326.

- [6] Р. Р. Андреасян, А. Н. Макаров, *Астрофизика* **30**(1), 170 (1989). DOI: 10.1007/BF01004096.
- [7] Р. Р. Андреасян, Е. А. Михайлов, А. Р. Андреасян, *Астрономический журнал* **97**(3), 179 (2020). DOI: 10.1134/s1063772920030014.
- [8] C. Norrelou, R. Beck, E. M. Berkhuijsen, et al., *Astron. Astrophys.* **265**, 417 (1992).
- [9] R. Beck, A. Fletcher, A. Shukurov, et al., *Astron. Astrophys.* **444**(3), 739 (2005). DOI: 10.1051/0004-6361:20053556.
- [10] P. Frick, R. Stepanov, R. Beck, et al., *Astron. Astrophys.* **585**, A21 (2016). DOI: 10.1051/0004-6361/201526796.
- [11] А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, А. М. Шукуров, *Магнитные поля галактик* (М., Наука, 1988).
- [12] K. Subramanian, L. Mestel, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **265**, 649 (1993). DOI: 10.1093/mnras/265.3.649.
- [13] D. Moss, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **275**(1), 191 (1995). DOI: 10.1093/mnras/275.1.191.
- [14] A. Phillips, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **94**(1), 135 (2001). DOI: 10.1080/03091920108204133.
- [15] T. F. Stepinski, E. H. Levy, *Astrophysical Journal* **379**, 343 (1991). DOI: 10.1086/170509.
- [16] D. Sokoloff, *Magnetohydrodynamics* **31**(1–2), 44 (1995).
- [17] Е. А. Михайлов, *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия* **5**, 40 (2020). DOI: 10.3103/S0027134920050173.
- [18] E. Mikhailov, *Magnetohydrodynamics* **56**(4), 403 (2020). DOI: 10.22364/mhd.56.4.5.
- [19] A. Shukurov, L. F. S. Rodrigues, P. J. Bushby, et al., *Astron. Astrophys.* **623**, A113 (2019). DOI: 10.1051/0004-6361/201834642.
- [20] E. A. Mikhailov, V. V. Pushkarev, *Research in Astronomy and Astrophysics* **21**(3), 056 (2021). DOI: 10.1088/1674-4527/21/3/056.
- [21] E. A. Mikhailov, V. V. Pushkarev, *Astronomy Reports* **65**(10), 990 (2021). DOI: 10.1134/S1063772921100231.

Поступила в редакцию 13 июня 2022 г.

После доработки 5 декабря 2022 г.

Принята к публикации 6 декабря 2022 г.