

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАСХОДЯЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАМЕНИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГАЗЕ

С. С. Минаев<sup>1,2</sup>, С. Н. Мокрин<sup>2</sup>, В. В. Губернов<sup>1,2</sup>

*Рассмотрена задача о гидродинамической неустойчивости расходящегося цилиндрического пламени предварительно перемешанной смеси газов. Получено, что действие центробежного ускорения и процессов переноса на фронте пламени приводят к стабилизации пламени при достижении им критического радиуса. Задача решалась в постановке Ландау и учитывалась зависимость нормальной скорости пламени от кривизны фронта. При больших радиусах пламени полученные результаты согласуются с результатами линейной теории гидродинамической неустойчивости плоского пламени, распространяющегося в поле массовых сил.*

**Ключевые слова:** гидродинамическая неустойчивость, расходящееся пламя, вращающийся газ.

*Введение.* Процессы горения во вращающемся газе перспективны для их использования при решении проблем энергетики, создании новых промышленных технологий сжигания газа и в исследовательских целях [1–5]. Искусственно создаваемое ускорение при вращении газа можно рассматривать как новый эффективный параметр для управления и оптимизации процессов горения.

В данной работе рассматривается задача о влиянии ускорения на гидродинамическую неустойчивость цилиндрического пламени, распространяющегося во вращающемся газе по вектору центробежного ускорения. Во вращающемся газе в дополнение к реальной массовой силе на элементарный объем газа действуют силы инерции: кориолисова и центробежная. Развитие гидродинамической неустойчивости может приводить к

<sup>1</sup> ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: minaevss@yahoo.com.

<sup>2</sup> Дальневосточный федеральный университет, 690922 Россия, Владивосток, пос. Аякс, остров Русский, 10.

самоускорению расходящихся пламён, распространяющихся в газе без вращения [6]. Целью данной работы было исследование влияния вращения газа на гидродинамическую неустойчивость расходящихся пламён. Задача рассматривалась в постановке Ландау [7], в которой фронт пламени представляет собой поверхность, разделяющую свежий газ и продукты горения. Предполагалось, что нормальная скорость пламени  $U_b$  зависит от локальной кривизны фронта пламени и описывается выражением

$$U_b = U_{ad}(1 + \sigma K), \quad (1)$$

где  $U_{ad}$  – скорость распространения плоского пламени,  $\sigma$  – длина Маркштейна и  $K$  – кривизна поверхности пламени [8]. Если поверхность пламени задана выражением  $r = R_f(t) + f(\varphi, t)$ , где  $r$  и  $\varphi$  – радиус и угол в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , то при больших радиусах пламени  $R_f(t) \gg \sigma$  и малых отклонениях поверхности пламени от цилиндрической формы  $|f| \ll R_f(t)$  кривизну поверхности  $K$  можно записать в виде:

$$K = \frac{1}{R_f^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (2)$$

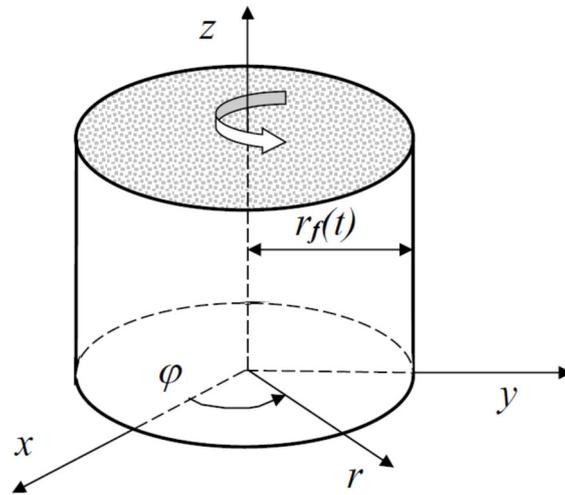


Рис. 1: Схема расходящегося цилиндрического пламени. До инициализации пламени газ вращался с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $z$ .

*Математическая модель.* Задача рассматривалась в двумерной постановке – предполагалось, что все возмущенные величины не зависят от координаты  $z$ . В системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $z$  (рис. 1),

уравнения Эйлера, описывающие движение газа, имеют вид:

$$\frac{\partial V_{1,2}}{\partial t} + V_{1,2} \frac{\partial V_{1,2}}{\partial r} + \frac{U_{1,2}}{r} \frac{\partial V_{1,2}}{\partial \varphi} - \frac{U_{1,2}^2}{r} = -\frac{\partial P_{1,2}}{\partial r} + \omega^2 r + 2\omega U_{1,2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + V_{1,2} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial r} + \frac{U_{1,2}}{r} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial \varphi} + \frac{U_{1,2} V_{1,2}}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P_{1,2}}{\partial \varphi} - 2\omega V_{1,2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_{1,2}}{\partial r} + \frac{V_{1,2}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial \varphi} = 0. \quad (5)$$

В этих безразмерных уравнениях символом  $V$  обозначена радиальная, а символом  $U$  – тангенциальная компоненты скорости газа, измеряемые в единицах нормальной скорости плоского пламени,  $U_{ad}$ .  $P_1$  и  $P_2$  есть безразмерные давления, измеряемые в единицах  $\rho_1 U_{ad}^2$ , где  $\rho_1$  – плотность свежего газа;  $r$  – безразмерная координата, измеряемая в длинах Маркштейна  $\sigma$ . Индексами 1 и 2 обозначены величины в областях со свежим газом и продуктами горения, соответственно.

Граничные условия на фронте пламени  $r = F(\varphi, t) = r_f(t) + f(\varphi, t)$ , линеаризованные относительно возмущений поверхности  $f$ , имеют вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} - V_1 + \frac{U_1}{r_f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial \varphi} = 1 + \frac{1}{r_f^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (6)$$

$$E \left( \frac{\partial F}{\partial t} - V_1 + \frac{U_1}{r_f} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial F}{\partial t} - V_2 + \frac{U_2}{r_f} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (7)$$

$$U_2 - U_1 = \frac{(V_1 - V_2)}{r_f} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (8)$$

$$P_1 - P_2 = (E - 1) \left( 1 + \frac{2}{r_f^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right). \quad (9)$$

Здесь  $E = \rho_1/\rho_2$  есть коэффициент расширения газа. Граничное условие (6) описывает распространение фронта пламени по свежему газу с нормальной скоростью (1). Условие (7) есть условие сохранения массы, а (8), (9) – условия сохранения импульса на фронте пламени.

*Невозмущенное поле течения горючего газа и продуктов горения.* В невозмущенном состоянии все величины зависят только от радиальной координаты. Обозначим невозмущенные величины индексом  $s$ . Из уравнения сохранения массы (5) и граничных условий (6), (7) на фронте невозмущенного пламени  $r = r_f(t) = Et$  следует, что радиальная скорость в горючем газе имеет вид  $V_{1s}(r, t) = E(E - 1)t/r$ , а в продуктах горения единственно возможным решением является  $V_{2s}(r, t) = 0$ . Тангенциальные

скорости можно найти из решения уравнения (4). С учетом равенства тангенциальных скоростей на фронте невозмущенного пламени (8) выражения для тангенциальных скоростей имеют вид:

$$U_{1s}(r, t) = -\frac{E(E-1)\omega t^2}{r}, \quad U_{2s}(r, t) = -\left(\frac{E-1}{E}\right)\omega r. \quad (10)$$

Заметим, что в области продуктов горения газ вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega = \omega(E-1)/E$ .

*Уравнения для возмущений.* Для исследования линейной устойчивости решения уравнений (3)–(5) и возмущения фронта пламени записываются в виде:

$$V_{1,2} = V_{1,2s} + v_{1,2}\phi, \quad U_{1,2} = U_{1,2s} + u_{1,2}\phi, \quad P_{1,2} = P_{1,2s} + p_{1,2}\phi, \quad f = a(t)\phi. \quad (11)$$

Все возмущенные величины обозначены строчными буквами и содержат множитель  $\phi = \exp(im\varphi)$ , где  $m$  – номер гармоники в разложении возмущений в ряд Фурье по углу  $\varphi$ , а  $i$  – мнимая единица. Подставляя выражения (11) в систему уравнений (3)–(5) можно получить систему линеаризованных уравнений для возмущенных величин. Выразим возмущения скоростей и завихренности  $\Gamma$  (ротор скорости) поля течения через функцию тока  $\psi$ :

$$v_{1,2} = -im\frac{\psi_{1,2}}{r}, \quad u_{1,2} = -im\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial r}, \quad \Gamma_{1,2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\psi_{1,2}. \quad (12)$$

Из уравнения для ротора возмущений скорости свежего газа  $\Gamma_1$  следует, что если завихренность возмущенной скорости свежего газа равнялась нулю в момент инициирования пламени, то она останется нулевой всегда. Считая завихренность поля нулевой и учитывая, что при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\psi_1 \rightarrow 0$ , получим, что решение уравнения  $\Gamma_1 = 0$  для функции тока  $\psi_1$  имеет вид:

$$\psi_1 = C_1(t)(r_f(t)/r)^m. \quad (13)$$

Из (12), (13) и линеаризованного уравнения (4) следует связь возмущений скорости и давления свежего газа на фронте пламени  $r = r_f(t)$  с функцией  $C_1(t)$ :

$$v_1 = -\frac{imC_1}{r_f}, \quad u_1 = -iv_1, \quad p_1 = (2\omega - m\Omega)r_f C_1 - i\left(r_f\frac{dC_1}{dt} + (m + E)C_1\right). \quad (14)$$

Для нахождения решений в области продуктов горения применим операцию дивергенции к линеаризованным уравнениям (3), (4) и убедимся, что величина  $\Phi =$

$E\rho_2 - 2\omega\psi_2/E$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Решая уравнение Лапласа, с учетом ограниченности  $\Phi$  при  $r \rightarrow \infty$ , получим:

$$E\rho_2 - \frac{2\omega\psi_2}{E} = EC_2(t) \left( \frac{r}{r_f} \right)^m. \quad (15)$$

Из линеаризованного уравнения (3) с учетом (15) можно получить уравнение для возмущений радиальной скорости продуктов горения:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - im\Omega v_2 = -mE \frac{C_2(t)}{r_f} \left( \frac{r}{r_f} \right)^{m-1}. \quad (16)$$

Полная производная по времени от возмущений радиальной скорости на фронте пламени  $r = r_f(t) = Et$  имеет вид:

$$\frac{dv_2(t, r_f)}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} \Big|_{r=r_f} + E \frac{\partial v_2}{\partial r} \Big|_{r=r_f}. \quad (17)$$

С учетом уравнения (5), (16) и (17) можно получить:

$$\frac{dv_2(t, r_f)}{dt} = im\Omega v_2 - \frac{imu_2 E}{r_f} - \frac{v_2 E}{r_f} - \frac{mC_2 E}{r_f}. \quad (18)$$

*Уравнение для возмущений поверхности пламени.* Используя соотношения (14), можно выразить значения скорости и давления свежего газа на фронте пламени через функцию  $C_1(t)$  и её производную по времени. Используя уравнения (12) и (18), можно исключить функцию тока  $\psi_2$  из уравнения (15) и выразить значение производной по времени от скорости продуктов горения на фронте пламени и возмущения давления через функцию  $C_2(t)$ . Получившиеся два уравнения вместе с линеаризованными граничными условиями (6) и (9) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $a$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  и  $u_1$ . Эта система уравнений может быть сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению для возмущений поверхности пламени  $a(t)$ . Используя подстановку  $a = g(t) \exp(-i(m-1)\Omega t)$ , можно получить уравнение для функции  $g(t)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 g}{dt^2} + \left( \frac{2(m+E)E}{(E+1)r_f} + \frac{2Em^2}{(E+1)r_f^2} \right) \frac{dg}{dt} + \\ & + \left( \frac{2E^2 m^2 (m-1)}{r_f^3} - \frac{m(m-1)E(E-1)}{r_f^2} - \frac{(E-1)(m+1)\omega^2}{E^2} \right) \frac{g}{E+1} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

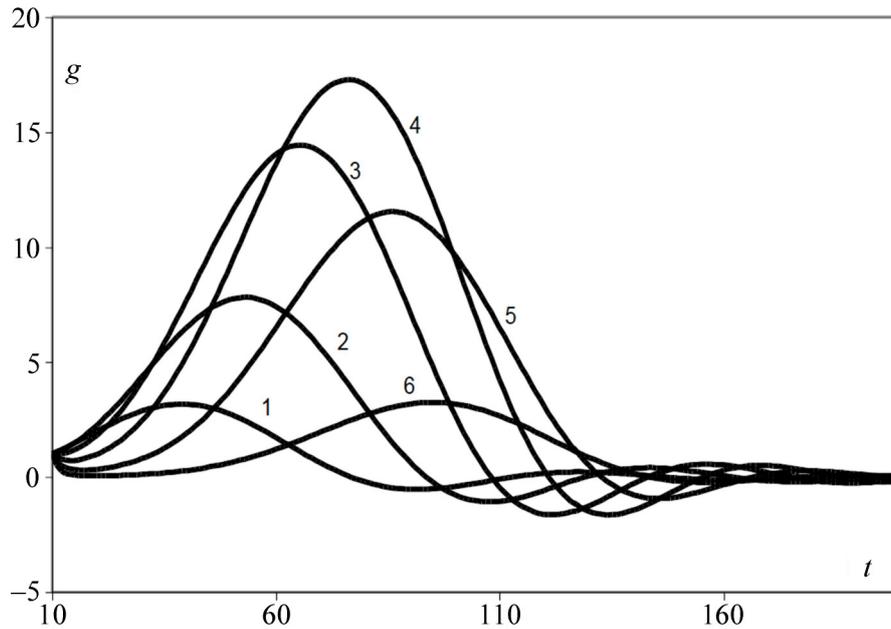


Рис. 2: Зависимость амплитуды возмущений поверхности пламени от времени для гармоник с номерами  $m = 10$  (1),  $15$  (2),  $20$  (3),  $25$  (4),  $30$  (5),  $35$  (6). Расчет проводился для следующих параметров задачи:  $E = 5$ ,  $\omega = 0.1$ .

Численные решения этого уравнения с начальными условиями  $t = 10$ ,  $g = 1$ ,  $\frac{d^2g}{dt^2} = 0$ , коэффициентом расширения  $E = 5$ , угловой скоростью  $\omega = 0.1$  и для пространственных гармоник с номерами  $m = 10, 15, 20, 25, 30, 35$  приведены на рис. 2. Начальный момент безразмерного времени  $t = 10$  соответствует радиусу пламени  $R_f = Et\sigma = 50\sigma$ , что достаточно для формирования цилиндрического пламени после зажигания горючей смеси от продуктов горения. Следует заметить, что если возмущения на фронте пламени растут медленнее, чем по линейному закону, по которому увеличивается радиус пламени, то такие возмущения будут устойчивыми [8].

Из рис. 2 видно, что возмущения с малыми и большими номерами гармоник затухают со временем, но в то же время имеются гармоники, амплитуда которых увеличивается со временем, если радиус пламени превышает некоторое критическое значение. При больших радиусах пламени пламя становится абсолютно устойчиво относительно всех возмущений.

Получим оценки критического радиуса пламени, при котором наступает стабилизация всех возмущений. Для этого в уравнении (19) перейдем к пределу  $r_f \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$ , но при этом будем считать, что величина  $m/r_f = k$  остается конечной. Физически это

означает, что при очень больших радиусах и больших номерах гармоник часть поверхности цилиндрического пламени можно приближенно заменить поверхностью плоского пламени, на котором развиваются возмущения с длинами волн  $2\pi/k$ . При больших радиусах пламени и постоянной величине  $k$  уравнение (19) переходит в уравнение, описывающее развитие возмущений на поверхности плоского пламени в поле массовой силы с ускорением  $\omega^2 r_f / E^2$  [8]. Ускорение обеспечивает полную стабилизацию фронта пламени при выполнении критерия

$$\frac{\omega^2 r_f}{E^2} > \frac{E - 1}{8}. \quad (20)$$

Из условия (20) можно оценить критическое значение радиуса пламени и критическое время после инициирования пламени, при котором наступает стабилизация всех возмущений.

Другой особенностью развития неустойчивости пламени во вращающемся газе является то, что возмущения вращаются с угловой скоростью  $\omega/E$  в лабораторной системе координат, в то время как свежий газ далеко от фронта пламени вращается со скоростью  $\omega$ . Это происходит потому, что при распространении цилиндрического пламени продукты горения “расталкивают” свежий газ и действуют подобно линейному источнику массы, расположенному на оси вращения.

*Заключение.* В работе показано, что при распространении расходящегося пламени существует критический размер пламени, при котором наступает стабилизация всех возмущений поверхности за счет действия центробежного ускорения. Получен простой критерий (20), позволяющий оценить размер пламени, при котором наступает стабилизация. С другой стороны, факт стабилизации пламени во вращающемся газе делает заманчивой перспективу использовать методику измерения нормальной скорости медленно горящих смесей во вращающихся закрытых сосудах. В обычных условиях такие измерения наталкиваются на существенные трудности, связанные с действием силы тяжести, приводящему к всплытию очага горения. Эксперименты по измерению нормальной скорости медленно горящих смесей во вращающихся сосудах были бы неизмеримо проще, чем существующие ныне методики измерения в условиях микрогравитации [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FZNS-2022-0010).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] А. Д. Марголин, В. П. Карпов, Докл. АН СССР **216**(2), 346 (1974).

- [2] S. Ishizuka, *Combustion and Flame* **82**, 176 (1990). DOI: 10.1016/0010-2180(90)90096-A.
- [3] В. Н. Кривулин, Е. А. Кудрявцев и др., *Физика Горения и Взрыва* **17**(1), 47 (1981).
- [4] G. I. Sivashinsky, Z. Rakib, M. Matalon, S. H. Sohrab, *Combustion Sci. and Tech.* **17**, 37 (1988). DOI: 10.1080/00102208808923942.
- [5] J. Chomiak, A. Gorczakowski, T. Parra, J. Jarosinski, *Combustion Science and Technology* **180**, 391 (2008). DOI: 10.1080/00102200701740964.
- [6] Ю. А. Гостинцев, А. Г. Истратов, Ю. В. Шуленин, *ФГВ* **24**(5), 63 (1988).
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* (М., Наука, 1988).
- [8] Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе, *Математическая теория горения и взрыва* (М., Наука, 1980).
- [9] P. D. Ronney, H. Y. Wachman, *Combustion and Flame* **62**(2), 107 (1985). DOI: 10.1016/0010-2180(85)90139-7.

Поступила в редакцию 3 ноября 2022 г.

После доработки 30 января 2023 г.

Принята к публикации 31 января 2023 г.