УДК 530.1

ДУАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ БЕЗМАССОВОГО СПИНА ДВА

В. А. Абакумова, С. Л. Ляхович

Рассматривается дуальная формулировка с высшими производными теории безмассового спина два в терминах тензора третьего ранга с диаграммой Юнга типа "крюк". Демонстрируется, что различные дуальные формулировки теории безмассового спина два могут быть получены из единого действия Штюкельберга подходящим выбором калибровочных условий. Одна из допустимых калибровок воспроизводит линеаризованную гравитацию Эйнштейна в терминах симметричного тензора второго ранга. Другая калибровка приводит к уравнениям третьего порядка на тензор третьего ранга с симметрией типа "крюк". Ожидается, что аналогичные дуальные формулировки могут быть построены для полей различных спинов с использованием общей процедуры включения полей Штюкельберга с приводимой калибровочной симметрией.

Ключевые слова: дуальная формулировка, безмассовый спин два, приводимая калибровочная симметрия, поля Штюкельберга.

Введение. Дуальные формулировки, представляющие собой различные теоретико-полевые реализации неприводимого представления одного и того же спина, в настоящее время широко изучаются. Интерес к ним обусловлен в том числе и их неэквивалентностью в случае включения взаимодействий, что открывает возможность для нахождения ранее неизвестных вершин взаимодействия. Известные в настоящее время дуальные формулировки, в частности для теории безмассового спина 2 [1, 2], имеют ограничения на размерность пространства-времени и не допускают включения совместных взаимодействий [3]. В настоящей работе предлагается альтернативная дуальная формулировка

Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050 Россия, Томск, пр-т Ленина, 36; e-mail: abakumova@phys.tsu.ru.

теории безмассового спина 2, совместная в пространстве любой размерности и перспективная с точки зрения включения взаимодействий.

Настоящая статья представляет собой материалы доклада, представленного на Московской международной школе физики 2022, и частично опирается на работу авторов [4]. Статья содержит краткое описание симметрий линеаризованного уравнения Нордстрёма, позволяющих построить дуальную формулировку с высшими производными теории безмассового спина 2 в терминах тензора 3-го ранга с симметрией типа “крюк”. В настоящей работе впервые построено действие Штюкельберга, из которого различные дуальные формулировки теории безмассового спина 2 получаются наложением подходящих калибровок.

Калибровочная симметрия линеаризованного уравнения Нордстрёма. Рассмотрим линеаризованную гравитацию Эйнштейна в четырёхмерном пространстве Минковского,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\Big(h\big(\Box h - \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\big) + h^{\mu\nu}\big(\partial^\lambda(\partial_\nu h_{\mu\lambda} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}) - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\big)\Big). \tag{1}$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$E_{\mu\nu} \equiv \frac{\delta S}{\delta h^{\mu\nu}} \equiv \frac{1}{2}\big(\partial_\mu\partial^\lambda h_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial^\lambda h_{\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\big) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\big(\partial^\lambda\partial^\rho h_{\lambda\rho} - \Box h\big) = 0, \tag{2}$$

их следствием является линеаризованное уравнение Нордстрёма,

$$N \equiv \eta^{\mu\nu}E_{\mu\nu} = \big(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box\big)h^{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

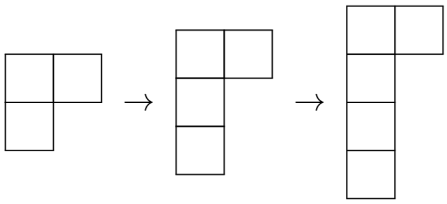
Несмотря на то, что уравнение Нордстрёма известно со времён создания общей теории относительности, его полная калибровочная симметрия до сих пор не известна. В линеаризованном случае приводимые преобразования симметрии уравнения (3) имеют вид

$$\delta_H h^{\mu\nu} = \partial_\lambda H^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{3}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda H^{\alpha\beta\lambda} + \partial^\nu H^{\alpha\beta\mu} + \partial^\mu H^{\alpha\beta\nu}); \tag{4}$$

$$\delta_{H_1} H^{\mu\nu\lambda} = \partial_\rho\big(H_1^{\mu\nu\lambda\rho} - \frac{1}{12}\eta_{\alpha\beta}(2\eta^{\mu\nu}H_1^{\alpha\beta\lambda\rho} - \eta^{\nu\lambda}H_1^{\alpha\beta\mu\rho} - \eta^{\lambda\mu}H_1^{\alpha\beta\nu\rho})\big); \tag{5}$$

$$\delta_{H_2} H_1^{\mu\nu\lambda\rho} = \partial_\sigma H_2^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}, \tag{6}$$

где параметры калибровочного преобразования представляют собой тензоры с симметрией, описываемой диаграммами Юнга типа “крюк” [4],

 ,

т. е. $H^{(\mu\nu)\lambda} = H^{\mu\nu\lambda}$, $H^{(\mu\nu\lambda)} = 0$; $H_1^{(\mu\nu)\lambda\rho} = H_1^{\mu\nu\lambda\rho}$, $H_1^{\mu\nu(\lambda\rho)} = 0$, $H_1^{(\mu\nu\lambda)\rho} = 0$, и т. д. В случае пространства произвольной размерности d, длина цепочки приводимости возрастает с увеличением d, в качестве параметров преобразования также выступают тензоры с симметрией типа "крюк".

Дуальная формулировка поля спина 2. Так как линеаризованное уравнение Нордстрёма описывает топологическую теорию поля (не имеющую физических степеней свободы), его общее решение представляет собой чистую калибровку. В этом смысле "крюк" представляет собой "потенциал" для метрики. Подставляя общее решение в терминах тензора с симметрией типа "крюк"

$$h^{\mu\nu} = \partial_\lambda H^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{3}\big(\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda H^\lambda + \partial^\nu H^\mu + \partial^\mu H^\nu\big) \tag{7}$$

в уравнения линеаризованной гравитации (2), приходим к уравнениям 3-го порядка

$$\widetilde{E}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\big(\partial_\mu\partial^\lambda\partial^\rho H_{\nu\lambda\rho} + \partial_\nu\partial^\lambda\partial^\rho H_{\mu\lambda\rho} - \Box\partial^\lambda H_{\mu\nu\lambda}\big) - \frac{1}{6}\big(\partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda H^\lambda - \eta_{\mu\nu}\Box\partial_\lambda H^\lambda\big) = 0. \tag{8}$$

Эти уравнения по построению эквиваленты (2) и также описывают безмассовое представление спина 2. Отметим, что уравнения (8) нелагранжевы. Преобразования калибровочной симметрии для (8) совпадают с (5), (6).

Действие Штюкельберга для производящей теории. В этом разделе будет построен лагранжиан, который является производящим для дуальных формулировок спина 2. Наложением подходящих калибровок из данной теории могут быть получены либо линеаризованные уравнения Эйнштейна, либо уравнения для тензора 3-го ранга с симметрией типа "крюк", играющего роль потенциала для линеаризованной метрики.

Используя общий метод Штюкельберга для приводимых калибровочных симметрий [5], можно построить эквивалентную форму динамики безмассового спина 2, вовлекающую как симметричный тензор 2-го ранга, так и тензор типа "крюк", описываемую действием Штюкельберга

$$
\begin{gathered}
\mathcal{S} = \int d^4x\,\mathfrak{L}\,, \quad \mathfrak{L} = \frac{1}{4}\Big(h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}\varphi + \partial_\gamma H^{\mu\nu\gamma} - \frac{1}{3}\eta_{\alpha\beta}\Big(\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma H^{\alpha\beta\gamma} + \partial^\nu H^{\alpha\beta\mu} + \\
+ \partial^\mu H^{\alpha\beta\nu}\Big)\Big)\Big((\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\big(h + 2\varphi + \frac{1}{3}\eta_{\alpha'\beta'}\partial_{\gamma'}H^{\alpha'\beta'\gamma'}\big) - \Box(h_{\mu\nu} + \partial^\lambda H_{\mu\nu\lambda}) - \\
- \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\rho h^{\lambda\rho} + \partial_\nu\partial^\lambda(h_{\mu\lambda} + \partial^\rho H_{\mu\lambda\rho}) + \partial_\mu\partial^\lambda(h_{\nu\lambda} + \partial^\rho H_{\nu\lambda\rho})\Big)\,,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где φ, $H^{\mu\nu\lambda}$ представляют собой поля Штюкельберга. Фиксируя поля Штюкельберга, приходим к уравнениям (2) линеаризованной гравитации Эйнштейна, в то время как фиксация исходных полей и полей Штюкельберга φ приводит к уравнениям (8). Действие (9) инвариантно относительно преобразований симметрии

$$
\begin{gathered}
\delta h^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}\mathcal{E} - \partial_\lambda\mathcal{E}^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{3}\eta_{\alpha\beta}\big(\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\mathcal{E}^{\alpha\beta\lambda} + \partial^\nu\mathcal{E}^{\alpha\beta\mu} + \partial^\mu\mathcal{E}^{\alpha\beta\nu}\big)\,, \quad \delta\varphi = \mathcal{E}\,, \\
\delta H^{\mu\nu\lambda} = \mathcal{E}^{\mu\nu\lambda} - \partial_\rho\Big(\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} - \frac{1}{12}\eta_{\alpha\beta}\big(2\eta^{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} - \eta^{\nu\lambda}\epsilon^{\alpha\beta\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda}\epsilon^{\alpha\beta\nu\rho}\big)\Big)\,, \\
\delta\mathcal{E}^{\mu\nu\lambda} = \partial_\rho\Big(\mathcal{E}_1^{\mu\nu\lambda\rho} - \frac{1}{12}\eta_{\alpha\beta}\big(2\eta^{\mu\nu}\mathcal{E}_1^{\alpha\beta\lambda\rho} - \eta^{\nu\lambda}\mathcal{E}_1^{\alpha\beta\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda}\mathcal{E}_1^{\alpha\beta\nu\rho}\big)\Big)\,, \\
\delta\mathcal{E} = 0\,, \quad \delta\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \mathcal{E}_1^{\mu\nu\lambda\rho} - \partial_\sigma\epsilon_1^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\,; \quad \delta\mathcal{E}_1^{\mu\nu\lambda\rho} = \partial_\sigma\mathcal{E}_2^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\,, \quad \delta\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} = \mathcal{E}_2^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\,.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Корректность предложенных дуальных формулировок можно подтвердить подсчётом числа степеней свободы, используя формулу, полученную в работе [6] (см. также [4, 7]). В результате для теорий, описываемых (8) и (9), получается число степеней свободы, соответствующее безмассовому представлению спина 2 для любого d.

Заключение. В настоящей работе рассмотрено дуальное представление безмассового спина два тензорами 3-го ранга с симметрией, описываемой диаграммой Юнга типа "крюк", подчиняющимися уравнениям с высшими производными. Построено действие Штюкельберга, из которого возможные дуализации выделяются выбором калибровочных условий. Ожидается, что подобные дуальные формулировки могут быть построены для полей произвольного спина, как в безмассовом, так и в массивном случае. В частности, известно что массивный спин один может быть описан антисимметричным тензором 2-го ранга [5], а массивный спин два – тензором 4-го ранга с диаграммой Юнга типа "окно" [7]. В дальнейших работах предполагается развить общую систематическую процедуру построения дуальных формулировок данного типа, основанную на методе включения полей Штюкельберга с приводимой калибровочной симметрией. Так как данный метод применим и в нелинейном случае, полученные с его помощью дуализации перспективны с точки зрения изучения проблем взаимодействия различных спинов.

Исследование дуальных формулировок теории безмассового спина два было выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки России, проект № FSWM-2020-0033. Построение действия Штюкельберга было поддержано грантом Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] T. Curtright, Phys. Lett. B **165**, 304 (1985). DOI: 10.1016/0370-2693(85)91235-3.

[2] C. M. Hull, JHEP **09**, 027 (2001). DOI: 10.1088/1126-6708/2001/09/027.

[3] X. Bekaert, N. Boulanger, M. Henneaux, Phys. Rev. D **67**, 044010 (2003). DOI: 10.1103/PhysRevD.67.044010.

[4] V. Abakumova, D. Frolovsky, H.-C. Herbig, S. Lyakhovich, Eur. Phys. J. C **82**(9), 780 (2022). DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10734-x.

[5] V. A. Abakumova, S. L. Lyakhovich, Phys. Lett. B **820**, 136552 (2021). DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136552.

[6] D. S. Kaparulin, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, JHEP **01**, 097 (2013). DOI: 10.1007/JHEP01(2013)097.

[7] В. А. Абакумова, С. Л. Ляхович, Дуальные формулировки в теориях с приводимой симметрией Штюкельберга. Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та, № 4, 2241506 (2022).

Поступила в редакцию 11 декабря 2022 г.

После доработки 3 февраля 2023 г.

Принята к публикации 6 февраля 2023 г.

Публикуется по рекомендации оргкомитета Московской международной школы физики 2022 (http://mosphys.ru)