УДК 533.95

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЕ

С. Ю. Пичугин[1], С. А. Белов[1,2]

Используя теорию возмущений, с точностью до членов второго и третьего порядка малости произведен вывод уравнений, описывающих распространение альфвеновских волн в двухжидкостной плазме. Показано, что альфвеновская волна нелинейно индуцирует продольные движения ионов и нейтралов, которые оказывают воздействие на возмущения поперечной компоненты магнитного поля.

Ключевые слова: нелинейные альфвеновские волны, частично ионизованная плазма, двухжидкостная модель, самовоздействие.

Исследование альфвеновских волн в нелинейном приближении является крайне важным для понимания процессов нагрева корональной плазмы и ускорения солнечного ветра (см., напр., [1–4]). Отметим также, что для большого круга астрофизических приложений представляет интерес анализ альфвеновских и магнитоакустических волн в частично ионизованной (ЧИ) плазме [4–7]. При этом часто исследования проводятся с использованием двухжидкостной модели [5–8], в которой плазма может быть представлена как смесь двух компонент – ионной и нейтральной, где ионная компонента объединяет электроны и ионы. В этой модели предполагается максвелловское распределение по скоростям в каждой из компонент ЧИ плазмы и используются такие параметры, как коэффициент трения между ионами и нейтралами и константа скорости ионно-нейтральных соударений, явный вид которых получен в [8]. В [9] на основе двухжидкостной модели с точностью до членов второго порядка малости нами был произведен вывод уравнений, описывающих распространение альфвеновских волн

[1] Самарский филиал Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, 443011 Россия, Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: theor@fian.smr.ru.

[2] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, 443086 Россия, Самара, Московское ш., 34.

вдоль внешнего магнитного поля в ЧИ плазме. Выяснено, что при распространении альфвеновских волн в ЧИ плазме происходит нелинейное индуцирование возмущений плотностей обеих компонент плазмы. В настоящей работе исследуются индуцирование продольных движений и самовоздействие альфвеновских волн в ЧИ плазме. При этом данные эффекты можно описать в рамках многожидкостной гидродинамики с добавлением уравнений движения нейтральных частиц и учетом столкновений ионов и нейтралов.

Исходные двухжидкостные уравнения для ЧИ плазмы, используемые в настоящей работе, имеют вид [5, 6]:

$$\rho_i\left(\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial t}+\vec{V}_i\nabla\vec{V}_i\right)=-\nabla P_i-\alpha_{in}\left(\vec{V}_i-\vec{V}_n\right)-\frac{1}{4\pi}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B}),$$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\nabla(\rho_i\vec{V}_i)=0,\ \ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\nabla\times(\vec{V}_i\times\vec{B}),\ \ \nabla\vec{B}=0,$$

$$C_{Vi}\rho_i\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+\vec{V}_i\nabla T_i\right)-\frac{k_BT_i}{m_i}\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\vec{V}_i\nabla\rho_i\right)=\frac{m_n}{m_i+m_n}\alpha_{in}\left(\vec{V}_i-\vec{V}_n\right)^2,$$

$$P_i=\frac{k_BT_i\rho_i}{m_i};$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial\vec{V}_n}{\partial t}+\vec{V}_n\nabla\vec{V}_n\right)=-\nabla P_n-\alpha_{in}\left(\vec{V}_n-\vec{V}_i\right),\ \ \frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\nabla(\rho_n\vec{V}_n)=0,$$

$$C_{Vn}\rho_n\left(\frac{\partial T_n}{\partial t}+\vec{V}_n\nabla T_n\right)-\frac{k_BT_n}{m_n}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\vec{V}_n\nabla\rho_n\right)=\frac{m_i}{m_i+m_n}\alpha_{in}\left(\vec{V}_i-\vec{V}_n\right)^2,$$

$$P_n=\frac{k_BT_n\rho_n}{m_n}. \tag{1}$$

В (1) переменные с индексом "i" – это параметры электронно-ионной компоненты, а переменные с индексом "n" – параметры нейтральной компоненты; ρ, T, P – плотность, температура и давление, соответственно; $\vec{V}$, $\vec{B}$ – вектора скорости и индукции магнитного поля; k_B – постоянная Больцмана; C_{Vi}, C_{Vn} – теплоёмкости при постоянном объёме; m_i, m_n – средние молекулярные массы; α_{in} – коэффициент трения между ионами и нейтралами, причем $\alpha_{in}=\Omega_{in}\rho_i\rho_n$, где Ω_{in} – константа скорости соударений на единицу массы. При записи уравнений (1) пренебрегалось влиянием диссипативных процессов, обусловленных наличием вязкости, конечной проводимости и теплопроводности.

Рассмотрим линейно-поляризованную вдоль оси x альфвеновскую волну, распространяющуюся вдоль внешнего магнитного поля с вектором индукции $\vec{B}_0$, направленным вдоль оси z. Тогда, пренебрегая зависимостью переменных от координат x и y, из

(1) можно получить следующие уравнения:

$$\rho_i\left(\frac{\partial V_{ix}}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial V_{ix}}{\partial z}\right)=\frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial B_x}{\partial z}-\alpha_{in}(V_{ix}-V_{nx}), \tag{2}$$

$$\rho_i\left(\frac{\partial V_{iz}}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial V_{iz}}{\partial z}\right)=-\frac{k_B}{m_i}\left(\rho_i\frac{\partial T_i}{\partial z}+T_i\frac{\partial \rho_i}{\partial z}\right)-\frac{B_x}{4\pi}\frac{\partial B_x}{\partial z}-\alpha_{in}(V_{iz}-V_{nz}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i V_{iz})}{\partial z}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=-\frac{\partial(V_{iz}B_x)}{\partial z}+B_0\frac{\partial V_{ix}}{\partial z}, \tag{5}$$

$$C_{Vi}\rho_i\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial T_i}{\partial z}\right)-\frac{k_B T_i}{m_i}\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t}+V_{iz}\frac{\partial \rho_i}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{m_n}{m_i+m_n}\alpha_{in}[(V_{ix}-V_{nx})^2+(V_{iz}-V_{nz})^2], \tag{6}$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial V_{nx}}{\partial t}+V_{nz}\frac{\partial V_{nx}}{\partial z}\right)=\alpha_{in}(V_{ix}-V_{nx}), \tag{7}$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial V_{nz}}{\partial t}+V_{nz}\frac{\partial V_{nz}}{\partial z}\right)=-\frac{k_B}{m_n}\left(\rho_n\frac{\partial T_n}{\partial z}+T_n\frac{\partial \rho_n}{\partial z}\right)+\alpha_{in}(V_{iz}-V_{nz}), \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_n V_{nz})}{\partial z}=0, \tag{9}$$

$$C_{Vn}\rho_n\left(\frac{\partial T_n}{\partial t}+V_{nz}\frac{\partial T_n}{\partial z}\right)-\frac{k_B T_n}{m_n}\left(\frac{\partial \rho_n}{\partial t}+V_{nz}\frac{\partial \rho_n}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{m_i}{m_i+m_n}\alpha_{in}[(V_{ix}-V_{nx})^2+(V_{iz}-V_{nz})^2]. \tag{10}$$

Для получения уравнений, описывающих распространение альфвеновской волны в ЧИ плазме, используем теорию возмущений и ограничимся рассмотрением величин вплоть до третьего порядка малости по параметру $\varepsilon << 1$, полагая, что в начальный момент среда не движется:

$$\rho_i=\rho_{i0}+\rho_{i1}+\rho_{i2}+\rho_{i3},\ \ \rho_n=\rho_{n0}+\rho_{n1}+\rho_{n2}+\rho_{n3},\ \ \vec{V}_i=\vec{V}_{i1}+\vec{V}_{i2}+\vec{V}_{i3},\ \ \vec{V}_n=\vec{V}_{n1}+\vec{V}_{n2}+\vec{V}_{n3},$$

$$T_i=T_{i0}+T_{i1}+T_{i2}+T_{i3},\ \ T_n=T_{n0}+T_{n1}+T_{n2}+T_{n3},\ \ B_x=B_{x1}+B_{x2}+B_{x3}, \tag{11}$$

$$\rho_{i1,n1}/\rho_{i0,n0}\sim T_{i1,n1}/T_{i0,n0}\sim|\vec{V}_{i1}|/c_i\sim|\vec{V}_{n1}|/c_n\sim B_{x1}/B_0\sim\varepsilon,$$

$$\rho_{i2,n2}/\rho_{i0,n0}\sim T_{i2,n2}/T_{i0,n0}\sim|\vec{V}_{i2}|/c_i\sim|\vec{V}_{n2}|/c_n\sim B_{x2}/B_0\sim\varepsilon^2,$$

$$\rho_{i3,n3}/\rho_{i0,n0}\sim T_{i3,n3}/T_{i0,n0}\sim|\vec{V}_{i3}|/c_i\sim|\vec{V}_{n3}|/c_n\sim B_{x3}/B_0\sim\varepsilon^3.$$

В (11) c_i, c_n – скорости звука для ионной и нейтральной компонент плазмы (см. ниже). Если теперь подставить выражения (11) в уравнения (2)–(10) и ограничиться только членами первого порядка малости, то можно получить следующие уравнения, описывающие линейную динамику альфвеновской и акустических мод:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial t^2} - c_A^2\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial z^2}\right) + v_0\left(\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial t^2} - V_A^2\frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 V_{iz1}}{\partial t^2} - c_i^2\frac{\partial^2 V_{iz1}}{\partial z^2} + (1-\eta)v_0\left(\frac{\partial V_{iz1}}{\partial t} - \frac{\partial V_{nz1}}{\partial t}\right) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 V_{nz1}}{\partial t^2} - c_n^2\frac{\partial^2 V_{nz1}}{\partial z^2} - \eta v_0\left(\frac{\partial V_{iz1}}{\partial t} - \frac{\partial V_{nz1}}{\partial t}\right) = 0. \tag{14}$$

Здесь $v_0 = \Omega_{in}\rho_0$, $\rho_0 = \rho_{i0} + \rho_{n0}$, $V_A^2 = \dfrac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$, $c_A^2 = \dfrac{B_0^2}{4\pi\rho_{i0}}$, $c_i^2 = \gamma\dfrac{k_B T_{i0}}{m_i}$, $c_n^2 = \gamma\dfrac{k_B T_{n0}}{m_n}$, $\gamma = \dfrac{C_{Pi}}{C_{Vi}} = \dfrac{C_{Pn}}{C_{Vn}}$. Величины $C_{Pi} = C_{Vi} + k_B/m_i$, $C_{Pn} = C_{Vn} + k_B/m_n$ – теплоёмкости ионной и нейтральной компоненты при постоянном давлении; c_i, c_n – скорости звука в ионной и нейтральной компоненте; $\eta = \rho_{i0}/\rho_0$ – степень ионизации плазмы. Уравнения для возмущений поперечных скоростей V_{ix1}, V_{nx1} имеют такой же вид, что и (12).

Независимость уравнений (13), (14) от уравнения (12) означает, что, если ЧИ плазма не была изначально акустически возмущена, то распространение альфвеновских волн не приводит к появлению в ней акустических возмущений первого порядка малости, т.е. можно положить, что ρ_{i1}, ρ_{n1}, T_{i1}, T_{n1}, V_{iz1}, $V_{nz1} = 0$ $(V_{ix1}, V_{nx1}, B_{x1} \neq 0)$. С учетом этого факта из (2)–(10) можно получить следующие уравнения для возмущений второго порядка малости:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial t^2} - c_A^2\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial z^2}\right) + v_0\left(\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial t^2} - V_A^2\frac{\partial^2 B_{x2}}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 V_{iz2}}{\partial t^2} - c_i^2\frac{\partial^2 V_{iz2}}{\partial z^2} + (1-\eta)v_0\left(\frac{\partial V_{iz2}}{\partial t} - \frac{\partial V_{nz2}}{\partial t}\right) + \\ + \frac{1}{8\pi\rho_{i0}}\frac{\partial^2 B_{x1}^2}{\partial t\partial z} + (1-\eta)v_0\frac{k_B m_n}{C_{Vi}m_i(m_i+m_n)}\frac{\partial(V_{ix1} - V_{nx1})^2}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 V_{nz2}}{\partial t^2} - c_n^2\frac{\partial^2 V_{nz2}}{\partial z^2} - \eta v_0\left(\frac{\partial V_{iz2}}{\partial t} - \frac{\partial V_{nz2}}{\partial t}\right) + \eta v_0\frac{k_B m_i}{C_{Vi}m_n(m_i+m_n)}\frac{\partial(V_{ix1} - V_{nx1})^2}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Уравнения (16), (17) показывают, что альфвеновская волна нелинейно индуцирует возмущения продольных скоростей V_{iz2} и V_{nz2}. В то же время видно, что акустические возмущения второго порядка малости не влияют на возмущения B_{x2}.

Из уравнений (2), (5) и (7), записанных с учетом слагаемых третьего порядка малости, можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 B_{x3}}{\partial t^2} - c_A^2\frac{\partial^2 B_{x3}}{\partial z^2}\right) + v_0\left(\frac{\partial^2 B_{x3}}{\partial t^2} - V_A^2\frac{\partial^2 B_{x3}}{\partial z^2}\right) =$$
$$= -\frac{\partial^3(V_{iz2}B_{x1})}{\partial t^2\partial z} - \frac{B_0}{\rho_{i0}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\left(\rho_{i2}\frac{\partial V_{ix1}}{\partial t}\right) - B_0\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\left(V_{iz2}\frac{\partial V_{ix1}}{\partial t}\right) -$$
$$-v_0\frac{\partial^2(V_{iz2}B_{x1})}{\partial t\partial z} - \frac{B_0 v_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_{i2}\frac{\partial V_{ix1}}{\partial t}\right) - \frac{B_0 v_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_{n2}\frac{\partial V_{nx1}}{\partial t}\right) -$$
$$-B_0\eta v_0\frac{\partial}{\partial z}\left(V_{iz2}\frac{\partial V_{ix1}}{\partial t}\right) - B_0(1-\eta)v_0\frac{\partial}{\partial z}\left(V_{nz2}\frac{\partial V_{nx1}}{\partial t}\right). \quad (18)$$

Уравнение (18) описывает самовоздействие альфвеновской волны при ее распространении в ЧИ плазме: нелинейно индуцированные альфвеновской волной возмущения продольных скоростей и плотностей ионной и нейтральной компонент ЧИ плазмы будут воздействовать на альфвеновскую волну, вызывая изменение поперечной составляющей магнитного поля в третьем порядке малости.

Рассмотрим случай, когда в линейном пределе изменение возмущения поперечной компоненты магнитного поля в альфвеновской волне описывается выражением

$$B_{x1} = A_B\exp(-k_I z)\sin(-\omega t + k_R z) = A_B\mathrm{Im}[\exp(-i\omega t + ikz)], \quad (19)$$

где ω – частота альфвеновской волны, $k = k_R + ik_I$, k_R – волновое число, k_I – декремент затухания. Подставляя это выражение в (12), можно получить дисперсионное соотношение, позволяющее для заданного значения ω находить k_R и k_I, при которых (19) является решением уравнения (12):

$$\omega(\omega^2 - c_A^2k^2) + iv_0(\omega^2 - V_A^2k^2) = 0. \quad (20)$$

Используя уравнения (2), (5) и (7) в первом порядке теории возмущений, находим для V_{ix1}, V_{nx1} следующие выражения:

$$V_{ix1} = -\frac{A_B\omega}{B_0(k_R^2+k_I^2)}\{\exp(-k_I z)[k_R\sin(-\omega t + k_R z) - k_I\cos(-\omega t + k_R z)] + k_I\},$$

$$V_{nx1} = -\frac{A_B B_0}{4\pi\rho_{n0}\omega}\{\exp(-k_I z)[k_R\sin(-\omega t + k_R z) + k_I\cos(-\omega t + k_R z)] - k_I\} - \frac{\eta}{(1-\eta)}V_{ix1}. \quad (21)$$

Если B_{x1} в ЧИ плазме эволюционирует в соответствии с выражением (19), то получим, что

$$\frac{\partial^2 B_{x1}^2}{\partial t\partial z} = 2A_B^2\omega\exp(-2k_I z)[k_I\sin(-2\omega t + 2k_R z) - k_R\cos(-2\omega t + 2k_R z)].$$

Используя данное соотношение и выражения (21), можно найти в явном виде частные решения уравнений (16), (17), описывающие индуцируемые альфвеновской волной возмущения продольных скоростей ионной и нейтральной компонент ЧИ плазмы:

$$V_{iz2} = \exp(-2k_I z)[A_{i1}(\omega)\sin(-2\omega t + 2k_R z) + A_{i2}(\omega)\cos(-2\omega t + 2k_R z)] +$$
$$+ \exp(-k_I z)[A_{i3}(\omega)\sin(-\omega t + k_R z) + A_{i4}(\omega)\cos(-\omega t + k_R z)] +$$
$$+ A_{i5}(\omega)[\exp(-k_I z) - 1] - A_{i2}(\omega) - A_{i4}(\omega),$$
$$V_{nz2} = \exp(-2k_I z)[A_{n1}(\omega)\sin(-2\omega t + 2k_R z) + A_{n2}(\omega)\cos(-2\omega t + 2k_R z)] +$$
$$+ \exp(-k_I z)[A_{n3}(\omega)\sin(-\omega t + k_R z) + A_{n4}(\omega)\cos(-\omega t + k_R z)] +$$
$$+ A_{n5}(\omega)[\exp(-k_I z) - 1] - A_{n2}(\omega) - A_{n4}(\omega). \qquad (22)$$

Аналогичные выражения для ρ_{i2}, ρ_{n2} находятся с помощью уравнений, получаемых из (4) и (9) для возмущений второго порядка малости. Подставляя найденные возмущения V_{iz2}, V_{nz2}, ρ_{i2}, ρ_{n2} в уравнение (18), можно найти его частное решение B_{x3}, обуславливающее в рассматриваемом случае искажение профиля альфвеновской волны при ее распространении в ЧИ плазме. Это решение имеет следующий вид:

$$B_{x3} = \exp(-3k_I z)[C_1(\omega)\sin(-3\omega t + 3k_R z) + C_2(\omega)\cos(-3\omega t + 3k_R z)] +$$
$$+ \exp(-2k_I z)[C_3(\omega)\sin(-2\omega t + 2k_R z) + C_4(\omega)\cos(-2\omega t + 2k_R z)] +$$
$$+ \exp(-k_I z)[C_5(\omega)\sin(-\omega t + k_R z) + C_6(\omega)\cos(-\omega t + k_R z)] +$$
$$+ C_7(\omega)[\exp(-2k_I z) - 1] + C_8(\omega)[\exp(-k_I z) - 1] - C_2(\omega) - C_4(\omega) - C_6(\omega).$$

В настоящей работе проведено исследование нелинейных альфвеновских волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в ЧИ плазме. На основе двухжидкостной модели с точностью до членов второго порядка малости произведен вывод уравнений для продольных скоростей ионной и нейтральной компонент плазмы. Выяснено, что при распространении альфвеновских волн в ЧИ плазме происходит нелинейное индуцирование акустических возмущений второго порядка малости в обеих компонентах плазмы. Найдены явные выражения для продольных скоростей, индуцируемых альфвеновской волной, эволюционирующей в соответствии с выражением (19). Получено уравнение для возмущений третьего порядка малости поперечной компоненты магнитного поля, описывающее самовоздействие альфвеновских волн в ЧИ плазме.

Работа частично поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (государственные задания по темам 0023-2019-0003, FSSS-2023-0009).

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. F. McLaughlin, I. De Moortel, A. W. Hood, Astronomy & Astrophysics **527**, A149 (2011). DOI: 10.1051/0004-6361/201015552.

[2] S. A. Belov, N. E. Molevich, D. I. Zavershinsky, Phys. Scr. **94**(10), 105605 (2019). DOI: 10.1088/1402-4896/ab2f02.

[3] S. Belov, N. Molevich, D. Zavershinsky, Solar Physics **295**, 160 (2020). DOI: 10.1007/s11207-020-01726-9.

[4] J. L. Ballester, R. Soler, J. Terradas, M. Carbonell, Astronomy & Astrophysics **641**, A48 (2020). DOI: 10.1051/0004-6361/202038220.

[5] T. V. Zagarashvili, M. L. Khodachenko, H. O. Rucker, Astronomy & Astrophysics **529**, A82 (2011). DOI: 10.1051/0004-6361/201016326.

[6] D. Martinez-Gomez, R. Soler, J. Terradas, The Astrophysical Journal **837**, 80 (2017). DOI: 10.3847/1538-4537/aa5eab.

[7] Н. Е. Молевич, С. Ю. Пичугин, Д. С. Рящиков, Краткие сообщения по физике ФИАН **47**(8), 53 (2020). https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=44524878.

[8] S. I. Braginskii, Rev. Plasma Phys. **1**, 205 (1965).

[9] С. А. Белов, С. Ю. Пичугин, Краткие сообщения по физике ФИАН **49**(11), 3 (2022). https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=49936336.

Поступила в редакцию 23 мая 2023 г.
После доработки 30 августа 2023 г.
Принята к публикации 7 сентября 2023 г.