

УДК 535.421

О КОЛИЧЕСТВЕННОМ ОПИСАНИИ ЛАЗЕРНОЙ ДИФРАКЦИИ НА ПЛАЗМЕННЫХ ФОРМИРОВАНИЯХ МИКРОННОГО ДИАМЕТРА

Е. В. Паркевич¹, А. И. Хирьянова¹, Т. Ф. Хирьянов¹, Д. В. Толбухин¹,
Я. К. Болотов^{1,2}, С. А. Амброзевич³

В работе моделируется дифракция плоской волны (с длиной волны 532 нм) при её прохождении сквозь плазменные цилиндры микронного диаметра (1, 5 и 10 мкм). Для расчета дифракции привлечены три независимых подхода, основанных на приближении геометрической оптики, первом Рытовском приближении, а также на представлении поля волны в виде ряда цилиндрических функций. Обсуждаются ключевые ограничения допустимости данных методов, а также точность получаемых решений. Показано, что решение задачи дифракции в первом Рытовском приближении имеет более широкий диапазон применимости, при котором оно предоставляет надежные результаты описания дифракции волны на плазменном формировании.

Ключевые слова: лазерное зондирование, дифракция волн, плазма, первое Рытовское приближение, ближняя волновая зона, оптическая визуализация.

Введение. Визуализация плазменных формирований микронного размера в поле когерентного лазерного излучения является важным физическим эффектом, нашедшим применение во многих техниках диагностики плазмы на основе лазерного зондирования [1]. Однако соответствующие механизмы визуализации до сих пор требуют тщательного исследования даже в простейших приближениях взаимодействия излучения с плазмой. В связи с этим возникает спрос на вычислительно простые и в то же время эффективные

¹ ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: parkevich@phystech.edu.

² МФТИ, 141701 Россия, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

³ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005 Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., 5/1.

математические методы количественного описания дифракции зондирующего излучения в плазменной среде, когда, в частности, необходимо точно предсказать изменения интенсивности и сдвига фазы излучения в выходной плоскости объекта и позади него. Такие методы могут быть основаны на первом Рытовском или Борновском приближениях, приближении геометрической оптики, численном решении уравнений Максвелла с использованием конечно-разностных схем, теории Ми [2, 3]. Не вдаваясь в глубокое обсуждение соответствующих методов расчета дифракции, в данной работе мы остановимся на численном решении уравнений, которые получаются в приближении геометрической оптики и первом Рытовском приближении. Интерес к данным приближениям вызван тем, что для них допустимо построение решения обратной задачи дифракции. Данный факт крайне важен для быстрого и вычислительно не емкого пути получения данных о плазменном объекте в эксперименте. Однако изменения характеристик излучения, рассчитанные с использованием соответствующих методов, могут вызывать вопросы на предмет точности и корректности, особенно когда речь идет о плазменном объекте размером в единицы микрон, соизмеримого с длиной волны зондирующего излучения.

В текущей работе мы исследуем данный вопрос численно на примере расчета дифракции плоской волны на плазменных нитях диаметром 1–10 мкм при длине волны излучения 532 нм, часто используемой в экспериментах. Результаты расчета дополнительно верифицируем путем точных решений скалярного волнового уравнения Гельмгольца, получаемых при разложении поля дифрагированной волны в ряд на цилиндрические функции.

Формулировка задачи. Предположим, что исследуемый плазменный объект просвечивается плоской монохроматической волной $\sqrt{I_0} \exp(-i\omega t + ikx)$ (используем данную форму комплексной записи плоской волны [4]), бегущей вдоль оси Ox в соответствии с системой координат, введенной на рис. 1(a).

Далее множитель $\exp(-i\omega t)$ мы опустим. Параметры волны: I_0 – интенсивность, $k = 2\pi/\lambda$ – модуль волнового вектора, λ – длина волны. Объект осесимметричен вдоль оси Oz , имеет радиус R и описывается гладкой действительной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x, y, z) = 1 + \bar{\varepsilon}(x, y, z)$. Мы считаем, что объект помещен в бесконечную среду с постоянной диэлектрической проницаемостью, равной единице, а сам объект характеризуется функцией $\bar{\varepsilon} = -\omega_{pe}^2/\omega^2$, выступающей в роли флуктуации бесконечной среды. Здесь $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_e/m_e)^{1/2}$ и ω обозначают плазменную частоту, зависящую от электронной плотности плазмы n_e , и частоту зондирующего излучения.

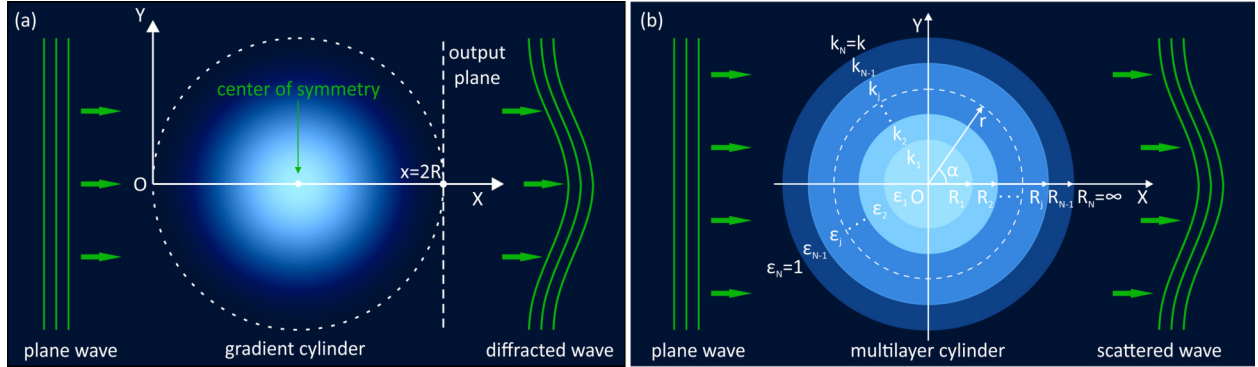


Рис. 1: Схематическое представление задачи дифракции для осесимметричного плазменного цилиндра: (а) модель гладкой функции диэлектрической проницаемости, (б) модель ступенчатого профиля диэлектрической проницаемости, задаваемого вложенными друг в друга цилиндрами.

Также полагаем, что резонансные эффекты и поглощение излучения в объекте отсутствуют.

В работах [5, 6] представлен асимптотический подход к решению скалярного волнового уравнения Гельмгольца в первом Рытовском приближении. Конечным результатом такого рассмотрения для случая плазменных объектов являются следующие уравнения

$$\Psi(x, f_\rho) = -\frac{k}{2i} \int_0^x \exp(-i\lambda\pi(x-x')f_\rho^2) \Lambda(x', f_\rho) dx', \quad (1)$$

$$\Psi(x, f_y, f_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y, z) \exp(-2\pi i(f_y y + f_z z)) dy dz, \quad (2)$$

$$\Lambda(x, f_y, f_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\epsilon}(x, y, z) \exp(-2\pi i(f_y y + f_z z)) dy dz, \quad (3)$$

$$\Phi(x, y, z) = ikx + i\delta\varphi(x, y, z) + \ln(\sqrt{I(x, y, z)/I_0}). \quad (4)$$

Дифрагированной волне приписывается функция комплексной фазы $\Phi(x, y, z)$, которая выражается через изменения характеристик волны, а именно: интенсивность $I(x, \rho) = I_0 \exp(2 \times \text{Re}\mathfrak{S}^{-1}(\Psi(f_x, f_\rho)))$ и сдвиг фазы $\delta\varphi(x, \rho) = \text{Im}\mathfrak{S}^{-1}(\Psi(f_x, f_\rho))$, вносимый объектом. Здесь $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ и $f_\rho = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}$ представляют собой двумерные переменные в координатном и частотном представлении. Переменные f_y и f_z являются

одномерными пространственными частотами. Уравнение (1) определено через двумерные спектры фурье-функций $\Phi(x, y, z)$ и $\bar{\varepsilon}(x, y, z)$, заданные выражениями (2) и (3). Для применимости уравнений (1)–(4) предполагается, что характерный масштаб изменений диэлектрической проницаемости объекта $l_{\bar{\varepsilon}} \sim \bar{\varepsilon}/|\nabla\bar{\varepsilon}|$ значительно превышает длину волны зондирующего излучения λ , а дисперсия распределения $\bar{\varepsilon}$ удовлетворяет условию $\langle |\nabla_{\perp}\Phi|^2 \rangle \ll k^2\sigma_{\bar{\varepsilon}}$. Здесь $\sigma_{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\langle \bar{\varepsilon}^2 \rangle} = \sqrt{\langle |\bar{\varepsilon} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle|^2 \rangle}$, а $\langle \bar{\varepsilon} \rangle = 1/V \int_V \bar{\varepsilon} dV$ является средним значением, введенным для функции $\bar{\varepsilon}$, заданной в объёме V . Символ $\langle \rangle$ означает усреднение. Поскольку Φ – комплексная функция, то в соответствующем условии присутствует её модуль $|\nabla_{\perp}\Phi|$. Оператор дифференцирования имеет вид $\nabla_{\perp} = \partial/\partial y + \partial/\partial z$. Таким образом, предполагается плавное изменение характеристик среды на масштабах порядка длины волны зондирующего излучения. Уравнение (1) учитывает дифракционное расплывание фронта волны во время прохождения объекта и позади него. В уравнении (1) параметр x является расстоянием, на котором рассматривается поле дифрагированной волны позади объекта. Предполагается при этом, что для него выполняется неравенство $\lambda(x-x')/l_{\bar{\varepsilon}}^2 \ll (l_{\bar{\varepsilon}}/\lambda)^2$, допускающее параболический вид уравнения Гельмгольца.

Также в работе [6] можно найти значительно более сильное упрощение асимптотического решения уравнения Гельмгольца, получаемое с точностью до величины порядка $1/kl_{\bar{\varepsilon}}$ в приближении геометрической оптики

$$\delta\varphi(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x \bar{\varepsilon}(x', \rho) dx', \quad (5)$$

$$I(x, \rho) = I_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^x (x-x') \Delta_{\perp} \bar{\varepsilon}(x', \rho) dx' \right). \quad (6)$$

Оператор дифференцирования имеет вид $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Интегрирование в уравнениях (5) и (6) ведется вдоль прямых лучей, параллельных оси направления распространения зондирующей волны. Помимо всех прочих ограничений, сделанных выше, в приближении геометрической оптики дополнительно предполагается, что дисперсия функции $\bar{\varepsilon}(x, y, z)$ является малой величиной $\sigma_{\bar{\varepsilon}} \ll 1$, а параметр x удовлетворяет соотношению $\sqrt{\lambda x} \ll l_{\bar{\varepsilon}}$, т. е. масштаб $l_{\bar{\varepsilon}}$ значительно больше первой зоны Френеля. В пределах указанных расстояний в свободном пространстве позади объекта выражение (5) предсказывает постоянный профиль сдвига фазы дифрагированной волны, изменения интенсивности которой согласно выражению (6) будут линейно нарастать.

Наконец, для сравнения с предыдущими подходами представляет интерес решение скалярного уравнения Гельмгольца при разложении поля дифрагированной волны в ряды цилиндрических функций. Рассмотрим модель вложенных цилиндров на рис. 1(b). Каждый цилиндрический слой однороден и имеет свою диэлектрическую проницаемость ε_j . Слои нумеруются от 1 (внутренний слой) до $N - 1$ (край объекта). Окружающая среда обладает $\varepsilon_N = 1$ и служит N -м слоем с бесконечной границей. Для многослойного цилиндра точное решение задачи дифракции состоит в разложении волнового поля внутри и вне цилиндра в ряд цилиндрических функций, представляющих собой частные решения уравнения Гельмгольца. Отметим, что для многослойного цилиндра точное решение строится для ТЕ- и ТМ-поляризаций падающей плоской волны. Если эффект поворота плоскости поляризации мал для рассматриваемого градиентного объекта [7] (будем считать это условие выполненным), то решения не отличаются для разных типов поляризации. Будем полагать, что зондирование ведется плоской волной, линейно-поляризованной в плоскости Oz , совпадающей с осью симметрии объекта. Согласно теоретическим рассмотрениям в [8] комплексная амплитуда дифрагированной волны в каждом слое может быть выражена как

$$u_j(r, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_{jn}J_n(k_j r) + B_{jn}Y_n(k_j r) + C_{jn}H_n^{(2)}(k_j r)) e^{i\alpha n}, \quad (7)$$

где $j \in [1, N]$ – номер слоя; $k_j = 2\pi\sqrt{\varepsilon_j}/\lambda$ – модуль волнового вектора в j -слое; J_n , Y_n и $H_n^{(2)}$ – цилиндрические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля второго рода n -го порядка. Переменная r обозначает длину радиуса-вектора из центра объекта, а α задает угол между этим радиус-вектором и волновым вектором падающей плоской волны, см. рис. 1(b). Учитывая асимптотику цилиндрических функций при $r = 0$ и $r \rightarrow \infty$, коэффициенты $B_{1n} = B_{Nn} = 0$, $A_{jn} = (i)^n$ и $C_{jn} = 0$ при $1 \leq j \leq N - 1$. Коэффициенты A_{jn} соответствуют ряду Фурье–Бесселя

$$e^{ik_1 x} = e^{ik_1 r \cos \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (i)^n J_n(k_1 r) e^{i\alpha n}, \quad (8)$$

для падающей плоской волны. Остальные коэффициенты находятся из соотношений (для каждого порядка функции n и номера слоя $j \in [1, N - 1]$)

$$\begin{aligned} & A_{jn}J_n(k_j r_j) + B_{jn}Y_n(k_j r_j) = \\ & = A_{(j+1)n}J_n(k_{j+1} r_j) + B_{(j+1)n}Y_n(k_{j+1} r_j) + C_{(j+1)n}H_n^{(2)}(k_{j+1} r), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon_j}(A_{jn}J'_n(k_j r_j) + B_{jn}Y'_n(k_j r_j)) = \\ & = \sqrt{\varepsilon_{j+1}}(A_{(j+1)n}J'_n(k_{j+1} r_j) + B_{(j+1)n}Y'_n(k_{j+1} r_j) + C_{(j+1)n}H_n^{(2)'}(k_{j+1} r)). \end{aligned} \quad (10)$$

Функции J'_n , Y'_n и $H_n^{(2)'}$ представляют собой производные от соответствующих цилиндрических функций. Таким образом, получается система $(2N-2)$ уравнений относительно неизвестных коэффициентов ряда (7). Матричная форма записи такой системы уравнений приведена в работе [9]. Решая алгебраические уравнения (9) и (10) и находя все коэффициенты ряда (7), можно вычислить интенсивность $I = |u_N(R, \alpha)|^2$ (квадрат модуля комплексной амплитуды) и сдвиг фазы $\delta\varphi = \arg[u_N(R, \alpha)/\exp(ikr \cos \alpha)]$ волны, дифрагированной на многослойном цилиндре.

Результаты численного расчета и их обсуждение. Не прибегая к значительному обобщению ситуации, в рамках модели на рис. 1(a) рассмотрим случай плазменных нитей с косинусоидальным профилем электронной плотности $n_e(r) = A(1 + \cos(\pi r/R))/2$, где $A = 5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ – размерный коэффициент, r – длина радиуса-вектора, проведенного из центра симметрии объекта. Максимальная величина модельного распределения n_e взята близкой к характерным значениям электронной плотности плазменных нитей, экспериментально измеренным в работе [10]. В модели на рис. 1(b) гладкий профиль аппроксимируется ступенчатой функцией с аналогичным максимальным значением электронной плотности.

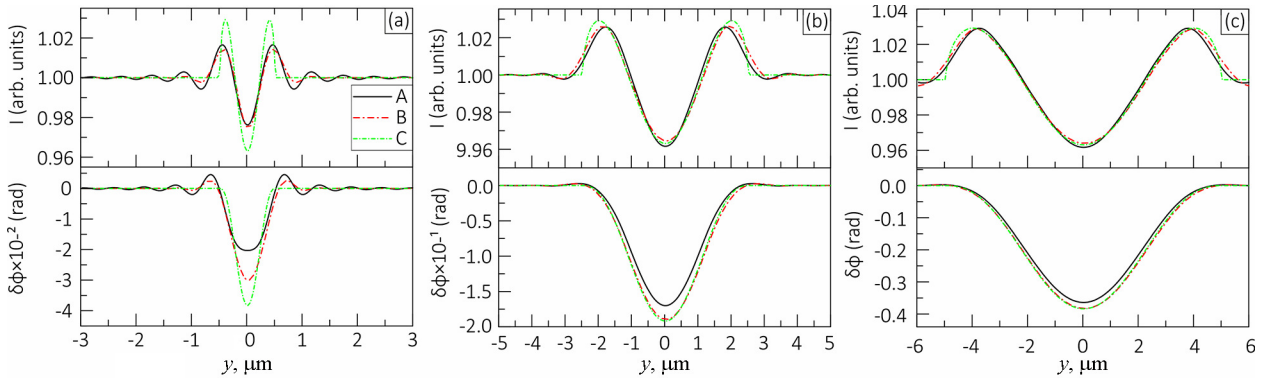


Рис. 2: Распределения интенсивности и сдвига фазы волны, дифрагированной на плазменном цилиндре диаметром 1 мкм (a), 5 мкм (b) и 10 мкм (c), полученные в выходной плоскости объекта. Буквами обозначены расчеты с использованием: A – цилиндрических функций, B – первого Рывтовского приближения, C – метода геометрической оптики.

На рис. 2 представлены результаты моделирования изменений интенсивности и сдвига фазы волны, рассчитанные в выходной плоскости объекта ($x = R$) с использованием подходов, указанных выше для радиусов плазменных нитей $R = 0.5$ (рис. 2(a)), 2.5 (рис. 2(b)) и 5 мкм (рис. 2(c)). Для данных объектов в методе расчета дифракции с использованием цилиндрических функций было задействовано $N = 6, 11, \text{ и } 21$ вложенных цилиндров. Последний слой – внешняя среда с бесконечной границей, соответственно. Максимальный порядок функций составлял $n = 100, 150 \text{ и } 150$. Шаг расчетной сетки был выбран 0.03 мкм, 0.05 мкм и 0.06 мкм. Аспект изображений составлял 6×6 мкм, 10×10 мкм и 12×12 мкм.

Видно, что три независимых метода (А, В и С) дают практически одинаковые результаты при расчете дифракции волны на цилиндре диаметром 10 мкм, см. рис. 2(c). Расхождения в максимальном значении сдвига фазы не превышают 5%. Отличия в изменениях интенсивности в районе максимумов и минимумов составляют не более 1–2%. Ввиду ограниченности метода геометрической оптики граница объекта имеет резкий обрыв в распределении интенсивности С. Другие методы (А и В) предсказывают плавное изменение интенсивности волны при выходе за границы объекта. Ожидаемо, что результаты, получаемые в приближении геометрической оптики и первого Рытовского приближения, будут давать схожие результаты при больших диаметрах объекта, поскольку влияние дифракционных эффектов будет становиться всё меньше. Напротив, при уменьшении диаметра плазменного цилиндра будет нарастать расхождение в результатах расчета используемыми методами. Так при диаметре цилиндра 5 мкм максимальные расхождения в сдвиге фазы дифрагированной волны достигают 11%, хотя данные, полученные в первом Рытовском приближении В и приближении геометрической оптики С, практически не отличаются друг от друга, см. рис. 2(b). Исключением опять же является граница объекта в распределении интенсивности С. При этом вне области объекта усиливается амплитуда биений интенсивности (распределения А и В). Интересными представляются результаты расчета дифракции волны на плазменном цилиндре диаметром 1 мкм, см. рис. 2(a). Для такого объекта уже не соблюдаются ключевые ограничения приближения геометрической оптики. В результате максимальные расхождения в сдвиге фазы распределения А с распределением С достигают почти 50%, а в случае с распределением интенсивности еще больше. В то же время для распределения интенсивности В результаты расчета дифракции в первом Рытовском приближении предсказывают хорошее совпадение с решением А, построенном на основе цилиндрических функций, хотя применимость первого Рытовского приближения

также оказывается под вопросом. Для распределения сдвига фазы В максимальные расхождения, однако, достигают почти 30% относительно распределения А.

Таким образом, дифракция волны на плазменных цилиндрах микронного диаметра может быть точно описана в первом Рытовском приближении либо в представлении поля в виде ряда цилиндрических функций, в то время как приближение геометрической оптики допустимо использовать, если диаметр объекта составляет не менее 10 мкм. Не принимая во внимание эффекты на границе, результаты расчета в приближении геометрической оптики и первом Рытовском приближении оказываются практически идентичными в выходной плоскости объекта. В то же время приближение геометрической оптики не позволяет описать дифракционное расплывание волны в ближней волновой зоне объекта позади его выходной плоскости. В этом плане первое Рытовское приближение оказывается более эффективным инструментом анализа дифракционных картин плазменных формирований и имеет более широкий диапазон применимости.

Работа проведена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-29-00799.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Г. В. Островская, Журнал технической физики **78**(9), 1 (2008). DOI: 10.1134/S1063784208090016.
- [2] P. Müller, *Optical diffraction tomography for single cells* (Biotechnology Center (Dresden University of Technology), Dresden, 2016).
- [3] P. Müller, M. Schürmann, J. Guck, The theory of diffraction tomography. arXiv preprint arXiv:1507.00466, 2015.
- [4] М. А. Исакович, *Общая акустика* (М., Наука, 1973).
- [5] С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику* (М., Наука, 1976).
- [6] В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (М., Наука, 1967).
- [7] R. N. Lehmberg, J. A. Stamper, Physics of Fluids **21**(5), 814 (1978). DOI: 10.1063/1.862299.
- [8] В. В. Никольский, Т. И. Никольская, *Электродинамика и распространение радиоволн* (М., Наука, 1989).
- [9] В. В. Котляр, М. А. Личманов, Компьютерная оптика, № 24, 26 (2002).

- [10] E. V. Parkevich et al., *Plasma Sources Science and Technology* **28**(9), 095003 (2019).
DOI: 10.1088/1361-6595/ab3768.

Поступила в редакцию 19 июля 2023 г.

После доработки 23 октября 2023 г.

Принята к публикации 24 октября 2023 г.