

# КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА ИЗ РЕШЕНИЙ УДАРНЫХ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А. М. Коваленко

*Рассмотрены решения ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике при отсутствии преломления потока, проходящего через плоскую ударную волну. Показано существование критического значения параметра анизотропии. Это значение является верхним пределом, ниже которого возможно описание ударных волн. Подобные решения ударных волн также обеспечивают механизм изотропизации системы.*

**Ключевые слова:** анизотропная гидродинамика, кварк-глюонная плазма, ударные волны.

1. *Введение.* Описание эволюции расширяющейся плотной и горячей адронной материи с использованием релятивистской анизотропной гидродинамики дало хорошие результаты с точки зрения моделирования экспериментальных данных [1, 2] и большой анизотропии давления [3, 4], которая появляется на ранних стадиях столкновений тяжелых ионов из-за быстрого продольного расширения. Большая разница между продольным и поперечным давлениями приводит к необходимости учета градиентов более высоких порядков в диссипативных гидродинамических теориях [5]. В релятивистской анизотропной гидродинамике анизотропия вводится явно как соответствующий параметр в одночастичной функции распределения. Введение этого параметра является своего рода пересуммированием градиентов разложения теории, что может дать интересные результаты.

Одним из основных приложений гидродинамики является описание распространения звука и связанных с ним эффектов. Звуковые явления в кварк-глюонной и ядерной материи изучались в основном в контексте образования ударных волн [6, 7]. Явление гашения струи вызывает интерес к изучению образования конуса Маха [8, 9]. Более ранние работы показали, что поперечные ударные волны в горячем кварк-глюонном

веществе могут генерироваться начальными флуктуациями локальной плотности энергии, которые являются результатом большого числа КХД-взаимодействий [10].

Проблема диссипативных гидродинамических теорий заключается в отсутствие адекватного описания явления ударных волн. Для теории Израэля–Стюарта ударные волны могут генерироваться только при малых числах Маха [11, 12]. Однако в релятивистской анизотропной гидродинамике можно получить разрывные решения ударных волн по аналогии с изотропным случаем идеальной жидкости [13]. Ранее были получены аналитические решения в ультрарелятивистском случае для продольной и поперечной ударных волн и представлены численные расчеты для произвольного полярного угла [14]. Основным предположением было введение дополнительного уравнения на анизотропный параметр  $\xi$ , который остаётся неизменным спереди и позади ударной волны, то есть  $\xi = \xi'$ . Для полярного угла  $0 < \alpha < \pi/2$ , угла между направлением движения потока и осью анизотропии (осью  $Oz$ ), такое “замораживание” анизотропии влечёт за собой эффекты, связанные с преломлением потока ( $\alpha' \neq \alpha$ ), а также с ускорением потока при определенных значениях отношения давлений  $\sigma$  и  $\xi$ . Такие эффекты могут вызвать определенные вопросы на практике. Поскольку естественно ожидать изотропизацию горячей адронной материи на поздних стадиях, предположение  $\xi' = \xi$  может привести к потере информации об эволюции материи.

Таким образом, вместо фиксирования параметра анизотропии можно положить  $\alpha' = \alpha$  для решений ударных волн, что возвращает нас к более знакомому поведению падающего и прошедшего потоков через ударную волну в изотропном случае. В настоящей статье предлагается вывод решений для ударных волн в отсутствие преломления потока. Обсуждаются ограничения на параметр анизотропии для существования ударных волн и механизм изотропизации системы.

*2. Основные уравнения.* Анизотропная релятивистская гидродинамика основана на подходе кинетической теории [15–17], где анзац для функции распределения  $f(x, p)$  имеет вид

$$f(x, p) = f_{\text{iso}} \left( \frac{\sqrt{p^\mu \Xi_{\mu\nu}(x) p^\nu}}{\Lambda(x)} \right), \quad (2.1)$$

где  $\Lambda(x)$  – температуроподобный масштабный параметр, а  $\Xi_{\mu\nu}(x)$  – анизотропный тензор. Мы рассматриваем одномерную анизотропию такую, что  $p^\mu \Xi_{\mu\nu} p^\nu = \mathbf{p}^2 + \xi(x) p_{\parallel}^2$  в локальной системе покоя (LRF), где  $\xi(x)$  – параметр анизотропии.

Тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  можно описать в терминах вектора 4-скорости  $U^\mu$  и пространственноподобного продольного вектора  $Z^\mu$  следующим образом

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P_\perp)U^\mu U^\nu - P_\perp g^{\mu\nu} + (P_\parallel - P_\perp)Z^\mu Z^\nu, \quad (2.2)$$

где  $P_\parallel$  и  $P_\perp$  – продольное (в направлении анизотропии) и поперечное давления, соответственно, а

$$U^\mu = (u_0 \cosh \vartheta, u_x, u_y, u_0 \sinh \vartheta), \quad (2.3)$$

$$Z^\mu = (\sinh \vartheta, 0, 0, \cosh \vartheta). \quad (2.4)$$

Здесь  $\vartheta$  – продольная быстрота,  $u_x, u_y$  – поперечные скорости и  $u_0 = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$ .

Важным свойством анизотропного описания является возможность факторизации анизотропной (зависящей от  $\xi$ ) и изотропной частей:

$$\varepsilon = R(\xi)\varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda), \quad (2.5)$$

$$P_{\perp,\parallel} = R_{\perp,\parallel}(\xi)P_{\text{iso}}(\Lambda), \quad (2.6)$$

где зависящие от анизотропии функции  $R_\perp(\xi)$  и  $R_\parallel(\xi)$  имеют вид [15]

$$R_\perp(\xi) = \frac{3}{2\xi} \left( \frac{1 + (\xi^2 - 1)R(\xi)}{1 + \xi} \right), \quad R_\parallel(\xi) = \frac{3}{\xi} \left( \frac{(\xi + 1)R(\xi) - 1}{1 + \xi} \right), \quad (2.7)$$

$$R(\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \xi} + \frac{\arctan \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right). \quad (2.8)$$

Уравнение состояния безмассового газа  $\varepsilon_{\text{iso}} = 3P_{\text{iso}}$  приводит к следующему соотношению между анизотропными функциями:  $2R_\perp(\xi) + R_\parallel(\xi) = 3R(\xi)$ .

Будем рассматривать решения для ударной волны в идеальной жидкости, характеризуемой тензором энергии-импульса (2.2). Ударная волна в гидродинамике нулевого порядка описывается разрывным решением уравнений движения [13, 18, 19].

Закон сохранения энергии-импульса приводит к следующему условию согласования на границе ударной волны, связывающему проекции тензора энергии-импульса на направление, перпендикулярное поверхности разрыва:

$$T_{\mu\nu}N^\mu = T'_{\mu\nu}N^\mu, \quad (2.9)$$

где  $N^\mu$  – единичный вектор нормали к поверхности разрыва, а тензоры энергии-импульса  $T_{\mu\nu}, T'_{\mu\nu}$  соответствуют падающему и прошедшему потокам, соответственно.

Рассмотрим поток, движущийся со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к направлению оси  $Oz$ . В случае нормальных ударных волн для компонент вектора, нормального к поверхности разрыва, имеем  $N_\mu = (0, \sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ , где  $\alpha$  – полярный угол. Как обсуждалось ранее, для прошедшего потока, движущегося со скоростью  $v'$ , предполагается  $\alpha' = \alpha$ . Будем рассматривать ударные волны сжатия, для которых  $P'_{\text{iso}} > P_{\text{iso}}$ . Тогда имеем три уравнения для  $v, v', \xi'$  с входными параметрами  $\sigma, \alpha, \xi$ , где  $\sigma = P'_{\text{iso}}/P_{\text{iso}}$ .

Таким образом, уравнения (2.9) приводят к следующей системе уравнений

$$\left[ \frac{R_1(\xi)}{1-v^2} + \frac{R_2(\xi)}{1-v^2 \cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha \right] v - \left[ \frac{R_1(\xi')}{1-v'^2} + \frac{R_2(\xi')}{1-v'^2 \cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha \right] \sigma v' = 0, \quad (2.10)$$

$$\left[ R_\perp(\xi) - \sigma R_\perp(\xi') + \frac{R_1(\xi)v^2}{1-v^2} - \sigma \frac{R_1(\xi')v'^2}{1-v'^2} \right] \sin \alpha = 0, \quad (2.11)$$

$$\left[ R_\perp(\xi) - \sigma R_\perp(\xi') + \frac{R_1(\xi)v^2}{1-v^2} - \sigma \frac{R_1(\xi')v'^2}{1-v'^2} + \frac{R_2(\xi)}{1-v^2 \cos^2 \alpha} - \sigma \frac{R_2(\xi')}{1-v'^2 \cos^2 \alpha} \right] \cos \alpha = 0, \quad (2.12)$$

где, в свою очередь,

$$R_1(\xi) = (R_\parallel(\xi) + 3R_\perp(\xi)), \quad R_2(\xi) = (R_\parallel(\xi) - R_\perp(\xi)).$$

Из уравнений (2.10)–(2.12) видно, что при граничных значениях  $\alpha = 0, \pi/2$  остаются только два уравнения ввиду умножения выражений на тригонометрические функции. Однако при любых других неграничных значениях  $\alpha$  мы будем рассматривать выражения в квадратных скобках в уравнениях (2.11), (2.12). Чтобы сохранить непрерывность решений, следует опустить  $\sin \alpha$  в (2.11) и  $\cos \alpha$  в (2.12) также и для  $\alpha = 0, \pi/2$ .

3. *Критическая точка.* Рассматривая граничные случаи для полярного угла  $\alpha$ , получаем, что поперечный случай ( $\alpha = \pi/2$ ) приводит к уравнению

$$R_\parallel(\xi') - R_\perp(\xi') = \frac{R_\parallel(\xi) - R_\perp(\xi)}{\sigma}. \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1) для  $\xi'$  всегда будет давать два корня  $\xi'_1 < \xi$  и  $\xi'_2 > \xi$  для  $\sigma \geq 1$ , за исключением случая, когда для  $\sigma = 1$  имеем  $\xi' = \xi = \xi_{\text{crit}}(\alpha = \pi/2)$ , где  $\xi_{\text{crit}}(\pi/2) \simeq 2.62143\dots$  является решением уравнения

$$\frac{\partial R_\parallel(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial R_\perp(\xi)}{\partial \xi}. \quad (3.2)$$

Очевидно ожидать, что при  $\sigma = 1$  ударная волна не существует, что соответствует решению  $v' = v, \xi' = \xi$ . Выбирая один из двух корней уравнения (3.1) при  $\sigma > 1$ , мы

хотим получить решение  $\xi' \rightarrow \xi$  при  $s \rightarrow 1$ . Таким образом, точка  $\xi_{\text{crit}}$  разделяет два пространства решений. Если  $\xi < \xi_{\text{crit}}$ , то для непрерывного предела  $\sigma \rightarrow 1$  необходимо выбрать левое решение  $\xi' < \xi_{\text{crit}}$ , так как только в этом случае выполняется условие  $\xi' \rightarrow \xi$  при  $\sigma \rightarrow 1$ . И наоборот, если  $\xi > \xi_{\text{crit}}$ , то мы должны выбрать правое решение  $\xi' > \xi_{\text{crit}}$ , чтобы обеспечить выполнение того же условия. В случае, когда  $\xi = \xi_{\text{crit}}$ , возможны оба решения. Таким образом, для любого  $\sigma > 1$  при плавном изменении  $\xi$  мы теряем непрерывность решения по  $\xi'$  всякий раз, когда  $\xi$  переходит через точку  $\xi_{\text{crit}}$ , из-за необходимости смены пространства решений. Это показывает возможность существования ударных волн только в одном из пространств решений  $\xi'$  в случае фиксированного полярного угла  $\alpha' = \alpha$ .

Более того, для предела  $\xi \rightarrow 0$  обнаружим, что левое решение  $\xi' \rightarrow 0$ . Однако для правого решения  $\xi > \xi_{\text{crit}}, \sigma > 1$  нет возможности перейти к изотропному пределу  $\xi \rightarrow 0$ , так как мы работаем в другом пространстве решений. Отсутствие изотропного предела явно противоречит эволюции кварк-глюонной материи, а именно наличию процесса изотропизации системы. Кроме того, в случае  $\xi > \xi_{\text{crit}}$  решения для скоростей обеспечивают поведение ударной волны разрежения, т. е.  $v' > v$ . Поэтому можно считать, что критическая точка  $\xi_{\text{crit}}$  является верхней границей параметра анизотропии для рассматриваемых ударно-волновых решений.

Решая систему уравнений (2.10)–(2.12) для полярного угла  $\alpha = 0$ , можно найти существование аналогичной критической точки  $\xi_{\text{crit}}(\alpha = 0) \simeq 5.47941$ .

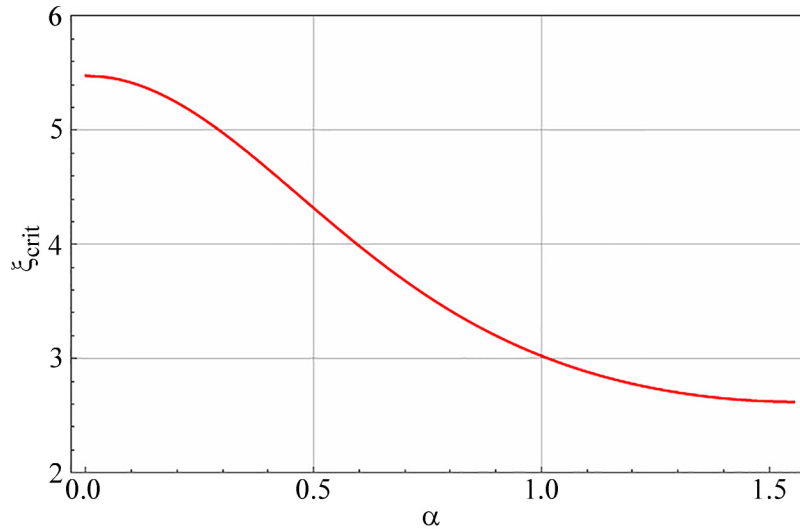


Рис. 1: График зависимости  $\xi_{\text{crit}}(\alpha)$ .

На рис. 1 показаны значения  $\xi_{\text{crit}}(\alpha)$  для произвольного полярного угла  $\alpha$ . Функция  $\xi_{\text{crit}}(\alpha)$  представляет собой монотонно убывающую функцию, которая идёт от значения  $\xi_{\text{crit}}(\alpha = 0)$  к значению  $\xi_{\text{crit}}(\alpha = \pi/2)$ . Таким образом, для формирования рассматриваемых ударных волн имеется ограничение на параметр анизотропии  $\xi$  для любого полярного угла  $\alpha$ .

Эволюцию параметра анизотропии можно получить, решая уравнения движения как в буст-инвариантном случае [15, 20], так и в не буст-инвариантном случае [21]. Из этих решений следует, что могут быть области, где  $\xi > \xi_{\text{crit}}$ . Более того, при начальном условии  $\xi_0 = 0$  параметр анизотропии достигает максимума  $\xi_{\text{max}}$  при определенном значении собственного времени  $\tau = \tau^*$ . Этот максимум зависит от отношения сдвиговой вязкости к плотности энтропии  $\eta/S$ . Низкие значения  $\eta/S$  соответствуют низким значениям  $\xi_{\text{max}}$ . Образование ударных волн возможно на протяжении всей эволюции материи, если  $\xi_{\text{max}} \leq \xi_{\text{crit}}$ . Например, в случае чисто продольного расширения (с начальным условием  $\xi_0 = 0$ ) максимальное значение параметра анизотропии  $\xi_{\text{max}} = \xi_{\text{crit}}(\pi/2) \simeq 2.62143$  соответствует  $\eta/S \simeq 0.17179$ , а  $\xi_{\text{max}} = \xi_{\text{crit}}(0) \simeq 5.47941$  соответствует  $\eta/S \simeq 0.35619$ .

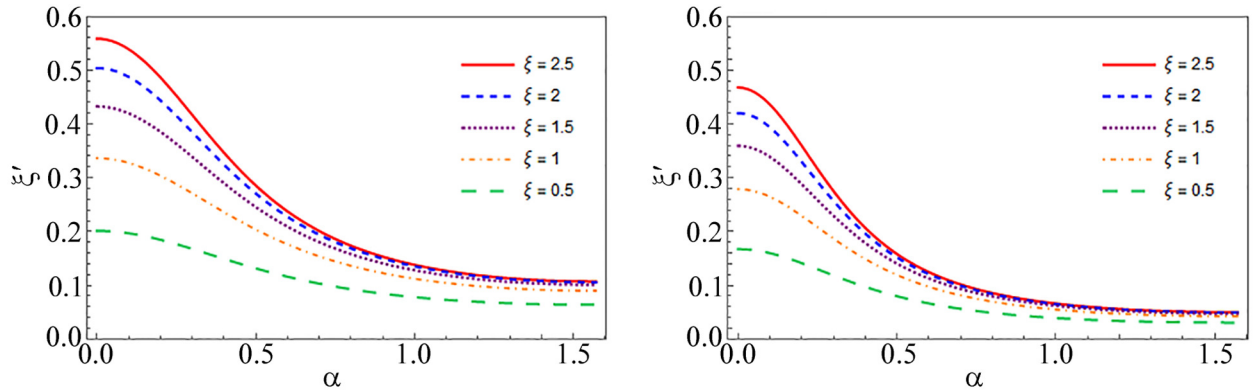


Рис. 2: Графики  $\xi'(\alpha|\sigma)$  для  $\xi = 2.5$  (сплошная),  $\xi = 2$  (пунктир),  $\xi = 1.5$  (точки),  $\xi = 1$  (штрихпунктир) и  $\xi = 0.5$  (длинный пунктир) при  $\sigma = 5$  (слева) и  $\sigma = 10$  (справа).

Рассмотрим угловую зависимость параметра анизотропии  $\xi'(\alpha, \sigma)$ . На рис. 2 изображён график функции  $\xi'(\alpha|\sigma)$ , где рассматривается область определения  $\xi \in [0, \xi_{\text{crit}}(\pi/2)]$ . Видно, что изотропизация системы возможна за счет генерации ударных волн. Для поперечного случая ( $\alpha = \pi/2$ ) мы имеем большее падение анизотропии, чем для продольного случая.

4. *Заключение.* Были получены решения для ударных волн в безмассовом газе при отсутствии преломления падающего потока (то есть при  $\alpha = \alpha'$ ) в рамках анизотропной

релятивистской гидродинамики. При непрерывном изменении параметра анизотропии  $\xi$  и параметра  $\sigma$  решение для  $\xi'$  останется непрерывным только в том случае, если будут введены ограничения  $\xi \leq \xi_{\text{crit}}$  или  $xi \geq \xi_{\text{crit}}$ . Таким образом, критическая точка  $\xi_{\text{crit}}$  разделяет два пространства решений для ударных волн. Выбор решения при  $\xi \geq \xi_{\text{crit}}$  приводит к отсутствию изотропного предела  $\xi \rightarrow 0$ , а также обнаруживается поведение, характерное для волн разрежения, а именно ускорение потока, прошедшего через ударную волну. Следовательно, рассмотрение ударно-волновых решений возможно только при  $\xi \leq \xi_{\text{crit}}$ . Иными словами, существование ударных волн возможно при малых анизотропиях. Несмотря на достаточно сильные ограничения на параметр анизотропии, предположение отсутствия преломления потока ( $\alpha' = \alpha$ ) является более “мягким”, чем предположение неизменяемости анизотропии ( $\xi' = \xi$ ). Однако, возможно, существует переход от рассмотренного в работе случая  $\alpha = \alpha'$  к случаю  $\xi = \xi'$ , при котором  $\xi_{\text{crit}} \rightarrow \infty$ .

Связь между эволюцией параметра анизотропии  $\xi$  и отношением сдвиговой вязкости к плотности энтропии  $\eta/S$  также может привести к оценке значений  $\eta/S$ , при которых возможна генерация ударных волн. Найденные значения критической точки  $\xi_{\text{crit}}$  показывают, что низкие значения  $\eta/S$  необходимы для существования ударных волн в течение всей эволюции системы при нулевой начальной анизотропии ( $\xi_0 = 0$ ).

Также было показано, что образование ударных волн может привести к изотропизации системы, поскольку  $\xi' \leq \xi$ . Механизм изотропизации в случае поперечных ударных волн сильнее, чем в случае продольных ударных волн.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Mubarak Alqahtani et al., Phys. Rev. C **96**(4), 044910 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevC.96.044910.
- [2] Mubarak Alqahtani et al., Nucl. Phys. A **982**, 423 (2019). DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2018.10.066. arXiv: 1807.05508 [hep-ph].
- [3] Wojciech Florkowski, Radoslaw Ryblewski, Acta Physica Polonica Series B **45**(12), 2355 (2011). DOI: 10.5506/APhysPolB.45.2355.
- [4] Wojciech Florkowski, Radoslaw Ryblewski, Michael Strickland, Nuclear Physics A **916**, 249 (2013). DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2013.08.004.
- [5] Mauricio Martinez, Michael Strickland, Phys. Rev. C **79**, 044903 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevC.79.044903.

- [6] Dirk H. Rischke, Stefan Bernard, Joachim A. Maruhn, Nucl. Phys. A **595**, 346 (1995). DOI: 10.1016/0375-9474(95)00355-1. arXiv: nucl-th/9504018.
- [7] A. Dumitru, D. H. Rischke, Phys. Rev. C **59**, 354 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevC.59.354.
- [8] L. M. Satarov, H. Stoecker, I. N. Mishustin, Physics Letters B **627**(1), 64 (2005). ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.08.102>.
- [9] J. Casalderrey-Solana, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **34**(8), S345 (2007). DOI: 10.1088/0954-3899/34/8/S21. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/34/8/S21>.
- [10] Miklos Gyulassy, Dirk H. Rischke, Bin Zhang, Nucl. Phys. A **613**, 397 (1997). DOI: 10.1016/S0375-9474(96)00416-2. arXiv: nucl-th/9609030.
- [11] Timothy S. Olson, William A. Hiscock, Annals of Physics **204**(2), 331 (1990). ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(90\)90393-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(90)90393-3).
- [12] A. Majorana, S. Motta, "Shock Structure in Relativistic Fluid-Dynamics". In: 10.1 (1985), pp. 29-36. DOI: doi:10.1515/jnet.1985.10.1.29. URL: <https://doi.org/10.1515/jnet.1985.10.1.29>.
- [13] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics. Hydrodynamics* (Elsevier, 2013).
- [14] A. Leonidov, A. Kovalenko, Eur. Phys. J. C **82**, 378 (2022). DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10337-6. arXiv: 2103.06745 [hep-ph].
- [15] M. Martinez, M. Strickland, Nucl. Phys. A **848**, 183 (2010). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2010.08.011>.
- [16] P. Romatschke, M. Strickland, Phys. Rev. D **68**, 036004 (2003). DOI: 10.1103/PhysRevD.68.036004.
- [17] P. Romatschke, M. Strickland, Phys. Rev. D **70**, 116006 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevD.70.116006.
- [18] W. Israel, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **259**(1296), 129 (1960).
- [19] T. P. Mitchell, D. L. Pope, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **277**(1368), 24 (1964).
- [20] Mauricio Martinez, Radoslaw Ryblewski, Michael Strickland, Physical Review C **85**, 064913 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevC.85.064913.
- [21] Mauricio Martinez, Michael Strickland, Nuclear Physics A **856**(1), 68 (2011). ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2011.02.003>.

Поступила в редакцию 6 сентября 2023 г.

После доработки 13 ноября 2023 г.

Принята к публикации 14 ноября 2023 г.