УДК 539.1.01

# ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ОТРАЖЁННОГО ОТ МАТЕРИАЛЬНОЙ СРЕДЫ

В. Г. Куракин

*Выведена функция распределения зарядов, рассеянных в результате наклонного падения игольчатого пучка заряженных частиц из вакуума на материальную среду и оказавшихся в результате рассеяния на плоскости, разделяющей среду и вакуум. Для этого использовалась функция распределения для многократного кулоновского рассеяния пучка, распространяющегося в однородной и безграничной среде. На фазовой плоскости приведены распределения рассеянных зарядов, соответствующих определенным фиксированным значением функции распределения – фазовые портреты пучка.*

**Ключевые слова**: многократное кулоновское рассеяние, отражение пучка, фазовый портрет, стохастическая электронная оптика.

Многократное кулоновское рассеяние объясняет особенности динамики пучка заряженных частиц, распространяющегося в материальной среде. С помощью функции распределения для данного механизма взаимодействия зарядов с ядрами и атомами среды [1, 2] были выведены критерии согласования пучка с установленной на его пути материальной пластинкой [3, 4], при этом критерием согласования является минимальное увеличение поперечного эмиттанса пучка. Также на основе функции распределения для безграничной материальной среды и модели линий тока были объяснены явления отражения и преломления пучка при его наклонном падении на границу раздела рассеивающей среды и вакуума, получены выражения для средних значений углов отражения и преломления и коэффициентов отражения [5, 6]. На основе выявленных закономерностей предложены методы формирования [7] и мониторинга пучков заряженных частиц [8]. Выведен закон отражения пучка заряженных частиц при его наклонном падении на материальную среду [9]. Класс отмеченных явлений и описывающих их законов составляет предмет стохастической оптики пучков заряженных частиц.

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: vgkurakin@mail.ru.

Как в световой, так и в оптике пучков заряженных частиц, в том числе и в упомянутой стохастической оптике, представляет интерес не только усреднённое движение частиц, но также их распределение по поперечным координатам и углам в пределах пучка. В прикладных задачах транспортировки и формирования пучков используется понятие фазового портрета пучка и его эмиттанса – площади, занимаемой пучком в фазовом пространстве поперечная координата – поперечный импульс или, то же самое, поперечная координата – угол. Для однородной рассеивающей среды фазовая динамика пучка заряженных частиц была исследована в работе [4], где получена матрица преобразования фазового портрета пучка при пересечении рассеивающей среды при нормальном падении пучка на границу рассеивающей среды и вакуума. В настоящей работе прослеживается формирование фазового портрета пучка, образованного в результате частичного отражения игольчатого пучка при его наклонном падении из вакуума на рассеивающую среду. Функция распределения для многократного кулоновского рассеяния имеет вид:

$$P(x,y,\theta)dyd\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{\Theta_s^2 x^2}\exp\left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x}\left(\theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2}\right)\right]dyd\theta. \tag{1}$$

Здесь $P(x,y,\theta)dyd\theta$ – вероятность обнаружить частицу, испытывающую рассеяние на ядрах среды, в интервалах поперечных смещений $y, y+dy$ и углов $\theta, \theta+d\theta$, составляемых рассеянным зарядом с направлением движения. Предполагается, что среда безгранична, частица несёт элементарный заряд, стартует в начале координат ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) и движется в направлении оси $x$. Величина $\Theta_s$ может быть выражена через параметры, определяющие радиационные процессы в веществе

$$\Theta_s^2 = \left(\frac{E_s}{\beta cp}\right)^2 \frac{1}{X_0}, \quad E_s = \left(\frac{4\pi}{\alpha}\right)^{1/2}, \quad m_e c^2 = 21\,\text{МэВ}, \tag{2}$$

где $\beta, p, c$ – соответственно, относительная скорость частицы, её импульс и скорость света, $X_0$ – радиационная длина, $\alpha = \dfrac{e^2}{\hbar c} \approx \dfrac{1}{137}$, $m_e, e$ – масса электрона и его заряд, $\hbar$ – постоянная Планка.

Поставим задачу нахождения распределения рассеянных зарядов вдоль прямой $y = kx$, где $k$ – постоянная, исходя из функции $P(x,y,\theta)$, проинтегрированной по всем углам. Данная процедура приводит к функции $S(x,y)$ распределения рассеянных частиц по поперечной координате

$$S(x,y)dy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Theta_s, x^{3/2}}\exp\left(-\frac{3y^2}{\Theta_s^2 x^3}\right)dy. \tag{3}$$

Вероятность $W(x,y)$ обнаружить заряд на глубине $x$ в диапазоне поперечных смещений $(0,y)$

$$W(x,y) = \int_0^{|y|} S(x,\xi)d\xi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Theta_s x^{3/2}}\int_0^{|y|}\exp\left(-\frac{3\xi^2}{\Theta_s^2 x^3}\right)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}|y|}{\Theta_s x^{3/2}}}\exp(-t^2)dt \tag{4}$$

постоянна вдоль линии

$$\frac{\sqrt{3}y}{\Theta_s x^{3/2}} = \kappa, \tag{5}$$

где $\kappa = \text{const}$, $-\infty < \kappa < \infty$, и эта линия вместе с осью $x$ определяет область плоскости, где данная вероятность всюду равна $W(x,y) = W(|\kappa|)$. Прямая $y = kx$ для значений

$$x_\kappa > \frac{3k^2}{\kappa^2\Theta_s^2} \tag{6}$$

попадает в эту область, и для указанных значений $x$ эта вероятность равна $W(\kappa)$. Очевидно, что вероятность обнаружить заряд в интервале от нуля до $x$ равна $W(x < x_\kappa) = \frac{1}{2} - W(\kappa)$. Также очевидно, что плотность распределения рассеянных зарядов на прямой $y = kx$ имеет вид

$$\rho(x) = \frac{dW(x<x_\kappa)}{dx} = -\frac{dW(\kappa)}{d\kappa}\frac{d\kappa}{dx} = \frac{k\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\Theta_s x^{3/2}}\exp(-\kappa^2) =$$

$$= \frac{k\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\Theta_s x^{3/2}}\exp\left(-\frac{3k^2}{\Theta_s^2 x}\right). \tag{7}$$

Отметим, что данная функция с точностью до множителя $1/2$ совпадает с функцией $S(x,y)$ после подстановки в неё $y = kx$. А поскольку последняя была, в свою очередь, получена из функции распределения для безграничной среды $P(x,y,\theta)$ интегрированием по всем углам рассеяния, с полным основанием можно считать, что полная функция распределения рассеянных зарядов на рассматриваемой прямой имеет вид

$$\rho(x,\theta)dxd\theta = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{k}{\Theta_s^2 x^2}\exp\left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x}(\theta^2 - 3k + 3k^2)\right]dxd\theta. \tag{8}$$

Она получена из делённого на два выражения (1) подстановкой в него уравнения рассматриваемой прямой. Соотношение (8) удобно переписать в виде

$$\rho(x,\theta)dxd\theta = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{k}{\Theta_s^2 x^2}\exp\left(-\frac{3k^2}{\Theta_s^2 x}\right)\exp\left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x}\left(\theta - \frac{3k}{2}\right)^2\right]dxd\theta. \tag{9}$$

Используя модель линий тока, мы получили функцию распределения для прямой на плоскости (что соответствует плоскости в пространстве). Работа с функцией распределения в данном конкретном случае представляется более наглядной. Пока все наши вычисления были строги в математическом смысле. Представим теперь, что мы имеем не безграничную среду, а материальную среду, ограниченную со стороны влёта частицы плоскостью $y = kx$. Т. е. частица пересекает границу рассеивающей среды и вакуума под углом $\arctan k$. Легко видеть, что функция распределения (1) является точным решением соответствующей краевой задачи [1], описывающей процесс рассеяния с граничным условием (9), поскольку удовлетворяет соответствующему уравнению с частными производными в среде и совпадает с (9) после подстановки в неё уравнения прямой $y = kx$, описывающей границу, разделяющую рассеивающую среду и вакуум.

Фазовый портрет рассеянных частиц, попавших в результате рассеяния на плоскость $y = kx$, эта область на фазовой плоскости $(x, \theta)$, ограниченная кривой, уравнение которой $\rho(x, \theta) = \rho_c = \text{const}$. В явном виде уравнение этой кривой имеет вид

$$\theta = \frac{3k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Theta_s^2 x \ln \frac{\sqrt{3}k}{\rho_c \pi \Theta_s^2 x^2} - 3k^2}. \tag{10}$$

Семейство этих кривых для разных значений $0 < \rho_c < \rho_m$, где $\rho_m$ – максимальное значение функции распределения

$$\rho_m = \rho\left(x = \frac{3k^2}{2\Theta_s^2},\ \theta = 3k/2\right) = \frac{4\sqrt{3}\Theta_s^2}{9\pi k^3 e^2}, \tag{11}$$

представлено на рис. 1. Здесь $\Theta_s = 1$ см$^{-1/2}$, $k = 0.2$, по вертикали отложен угол, отсчитываемый от интерфейсной прямой $y = kx$.

Для оптики пучков заряженных частиц вводится понятие поперечного эмиттанса пучка. Это площадь области на фазовой плоскости (поперечное смещение – угол с направлением движения), занимаемой пучком. За направление движения отражённого от рассеивающей среды пучка естественно принять средний угол, под которым движутся попавшие на плоскость $y = kx$ рассеянные частицы. Этот угол, равный согласно функции распределения $\rho(x, \theta)$ величине $3k/2$, совпадает со средним углом отражения основной части пучка, содержащейся в эллипсоподобной области, расположенной полностью выше оси абсцисс на рис. 2. Для построения фазового портрета отраженного пучка обратимся к геометрическим построениям, изображённым на рис. 2. Здесь стрелкой отражен падающий на границу раздела материальной среды и вакуума OA игольчатый пучок, OB – направление движения указанной выше основной части отраженного пучка. Выделенный жирным отрезок CA – область, занятая на интерфейсной

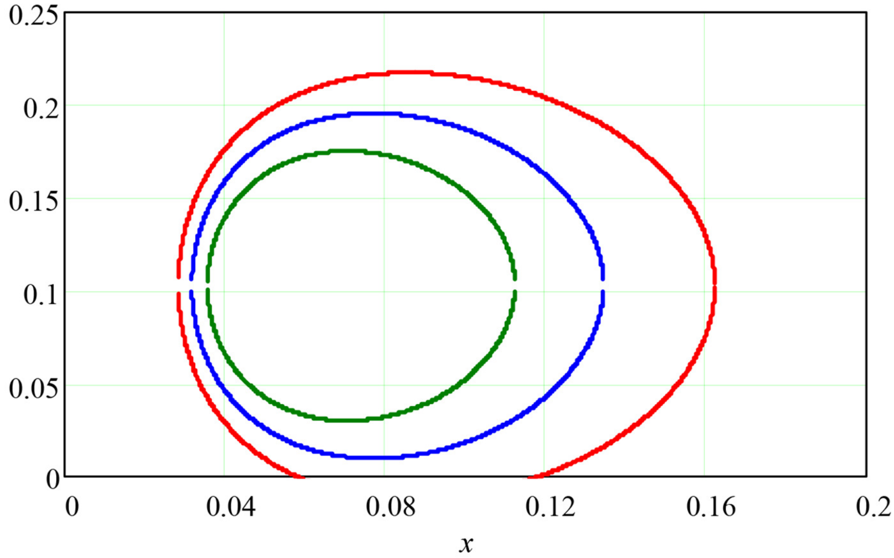


Рис. 1: *Семейство фазовых траекторий для значений $\rho = 2$ см$^{-1}$ (внешний контур), $\rho = 2.5$ см$^{-1}$ (средний контур) и $\rho = 3$ см$^{-1}$ (внутренний контур).*

границе основной части рассеянных частиц. Указанная область отражается на область, перпендикулярную направлению движения OB основной части отражённого пучка, и изображённой на рисунке жирным отрезком AD. Несложные расчеты указанной геометрической схемы приводят к следующему соотношению:

$$t(x) = \frac{(x_m - x)\sin(\eta(x))}{\cos(\arctan k)\cos\left(\dfrac{3k}{2} - \arctan k - \eta(x)\right)}. \tag{12}$$

Здесь $t$ – смещение заряда в поперечной плоскости рассеянного пучка, отсчитываемое от точки $A, \eta$ – угол, отсчитываемый от прямой OA. $\eta = \theta - \arctan k$. Точка A на интерфейсной границе соответствует максимальному значению $x = x_m$ на фазовой кривой (10). Согласно (12) каждая точка границы области рассеянных зарядов на фазовой плоскости $(x, \theta)$ переходит при движении отражённых зарядов в точку $(t, \eta)$.

Пример фазовой области основной части пучка заряженных частиц, отражённых от материальной среды, приведён на рис. 3. Характер границы области отражает нелинейный характер преобразования (12). Отметим значительное уменьшение при преобразовании площади фазовой области, занятой отражённым пучком (эмиттанс пучка) по сравнению с площадью фазовой области на интерфейсной границе. Согласно оценкам, вычисленный на рис. 3 эмиттанс отражённого пучка приблизительно равен $\pi$ см $\times$

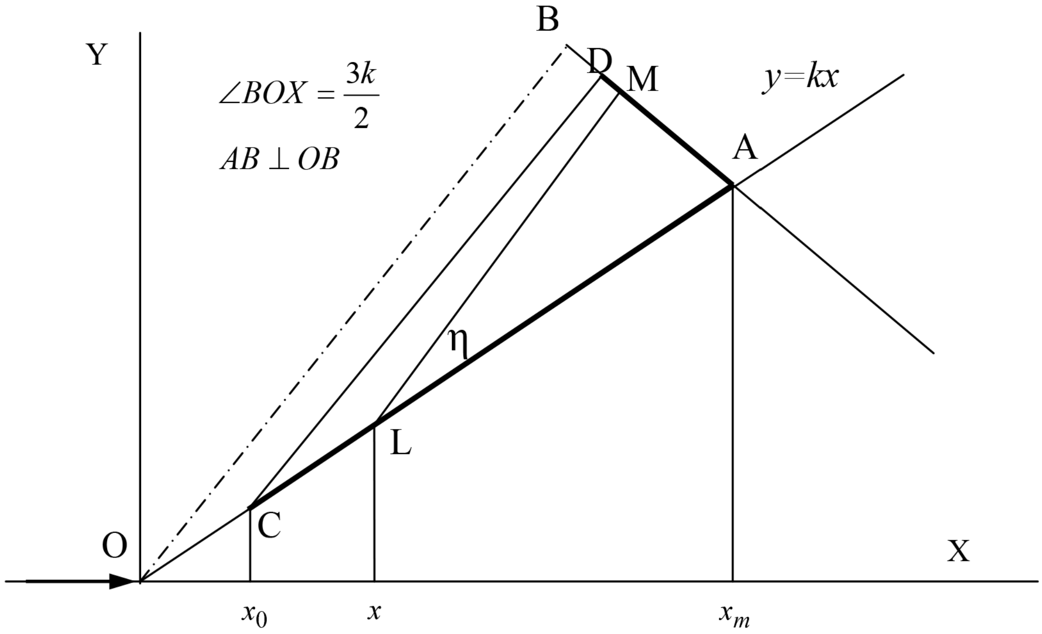


Рис. 2: *Схема, поясняющая преобразование фазового портрета пучка на интерфейсной границе в фазовый портрет отражённой части пучка.*

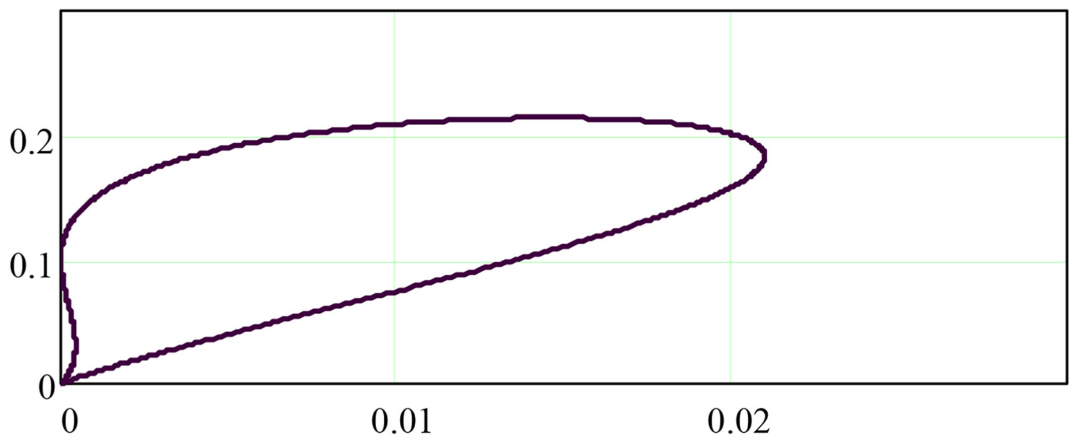


Рис. 3: *Фазовый портрет отраженной части пучка в плоскости, перпендикулярной направлению движения этой части пучка.*

мрар по сравнению с площадью фазовой области основной части пучка $7\pi$ см $\times$ мрад на интерфейсной границе.

Аналитическое выражение для фазового портрета части пучка, возникающего в результате отражения игольчатого пучка заряженных частиц при его наклонном падении на материальную среду, и его графическое представление на фазовой плоскости, можно считать основными результатами данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Росси, *Частицы больших энергий.* Перевод с английского (ГИТТЛ, Москва 1955). – 536 с.
[2] С. З. Беленький, *Лавинные процессы в космических лучах* (ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1948). – 244 с.
[3] В. Г. Куракин, П. В. Куракин, Краткие сообщения по физике ФИАН **44**(12), 36 (2017). DOI: 10.3103/S1068335617120065.
[4] В. Г. Куракин, П. В. Куракин, ЖТФ **88**(5), 795 (2018). DOI: 10.1134/S1063784218050158.
[5] В. Г. Куракин, П. В. Куракин, ЖТФ **89**(12), 1843 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219120120.
[6] В. Г. Куракин, П. В. Куракин, Письма в ЭЧАЯ **15**(7), 719 (2018). DOI: 10.1134/S1547477118070464.
[7] V. G. Kurakin, Beam Formation from Radionuclide Positron Source by the Charged Particles Beams Stochastic Optics Method. https://accelconf.web.cern.ch/rupac2021/.
[8] V. G. Kurakin, P. V. Kurakin, Phys. Part. Nuclei Lett. **17**, 578 (2020). DOI: 10.1134/S1547477120040287.
[9] В. Г. Куракин, Краткие сообщения по физике ФИАН **48**(10), 21 (2021). DOI: 10.3103/S1068335621100079.

Поступила в редакцию 17 мая 2023 г.
После доработки 22 декабря 2023 г.
Принята к публикации 25 декабря 2023 г.