

УДК 538.945

## ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧАЩИХ НЕСВЕРХПРОВОДЯЩИХ СЛОЕВ НА КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НЕОДНОРОДНОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СЛОЯ

П. И. Безотосный, К. А. Дмитриева

*В работе описан метод расчета критических параметров неоднородного сверхпроводящего слоя, находящегося в окружении несверхпроводящих слоев. Расчет был проведен с использованием уравнений Гинзбурга–Ландау, модифицированных для неоднородного по толщине сверхпроводящего слоя. Влияние граничных несверхпроводящих слоев было задано через общие граничные условия к данным уравнениям. Проведен численный расчет зависимостей критического тока сверхпроводящего слоя от внешнего магнитного поля. Показано, что для неоднородного по толщине слоя, в модели которого введено влияние граничащих слоев, оценка критического тока дает меньшие значения, чем для однородного слоя без какого-либо влияния границ. Установлено, что при определенном значении внешнего магнитного поля критический ток не зависит от степени неоднородности сверхпроводящего слоя. При этом влияние соседних слоев на его сверхпроводящее состояние не приводит к существенному изменению величины данного поля.*

**Ключевые слова:** сверхпроводящие слоистые структуры, критический ток, магнитное поле, теория Гинзбурга–Ландау, неоднородность.

*Введение.* Изучение конечномерных объектов различной формы, состоящих из сверхпроводящих материалов, активно проводится в настоящее время [1–4]. В частности, представляют интерес структуры, обладающие размерами, сопоставимыми с длиной когерентности  $\xi$  или лондоновской глубиной проникновения  $\lambda$  сверхпроводящего

---

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: bezpi@lebedev.ru.

материала, из которого они сделаны. В работах [5–8] проведено моделирование тонких сверхпроводящих пленок толщиной порядка  $\xi$ , где показано, что границы таких пленок оказывают существенное влияние на их сверхпроводящие свойства. Активно исследуются сверхпроводящие цилиндры с радиусом в несколько  $\lambda$ , в которых могут реализовываться различные экзотические сверхпроводящие состояния [9].

Результаты изучения отдельных сверхпроводящих объектов могут быть полезны при описании более сложных структур. В работах [3, 5, 10] предложен и развит метод расчета критических параметров слоистых структур, таких как S–N–S (сверхпроводник – нормальный металл – сверхпроводник) [5], S–I–S (сверхпроводник – изолятор – сверхпроводник) [10], а также рассмотрен случай S–I–S структуры с неоднородными по толщине сверхпроводящими слоями [3]. Продолжая данные исследования, в настоящей работе на основе теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ) сформулирована модель, позволяющая описывать сверхпроводящее состояние структуры, состоящей из трех слоев: несверхпроводящий материал – сверхпроводник – несверхпроводящий материал. В модели учтена неоднородность сверхпроводящего слоя по толщине. Вместе с тем, в расчете использовались общие граничные условия к уравнениям Гинзбурга–Ландау, позволяющие учитывать влияние граничащих несверхпроводящих слоев на свойства неоднородного сверхпроводящего слоя. С использованием предложенного метода были рассчитаны критические параметры упомянутой структуры.

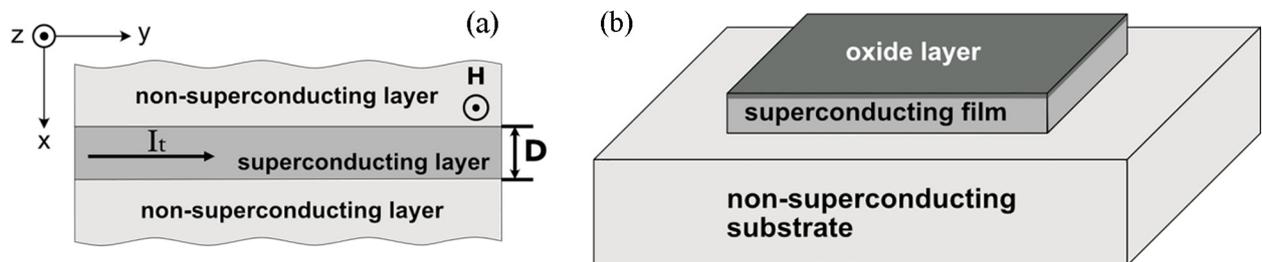


Рис. 1: (a) Сверхпроводящий слой между двумя несверхпроводящими слоями; (b) сверхпроводящая пленка на несверхпроводящей подложке.

*Описание модели.* Геометрия задачи представлена на рис. 1(а). Стоит отметить, что для сверхпроводящего слоя характерны симметричные относительно центра распределения параметров, характеризующих его свойства. Вместе с тем, описываемая ниже методика может быть расширена на случай несимметричных распределений параметров слоя, что будет актуально для сверхпроводящей пленки, которая граничит, с одной стороны, с подложкой, а с другой, например, покрыта оксидной пленкой (рис. 1(б)).

Ширина и длина рассматриваемой структуры существенно превосходят толщину сверхпроводящего слоя  $D$ . Направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  и протекания транспортного тока  $I_t$  в сверхпроводящем слое указаны на рис. 1(а). Декартова система координат  $(x, y, z)$  введена в задачу как показано на рис. 1. В описанном случае векторный потенциал имеет лишь  $y$ -компоненту,  $\mathbf{A} = A(x)\mathbf{e}_y$ . Делается допущение, что сверхпроводящий слой неоднороден по толщине, что отвечает реальным сверхпроводящим структурам. При напылении на подложку первый слой атомов сверхпроводящего материала образует кристаллическую решетку как у подложки. Эта решетка отличается от той, что характерна сверхпроводнику в объеме. С каждым новым напыленным слоем кристаллическая решетка стремится вернуться к виду, свойственному материалу в объеме. Отличие в структуре соседних атомарных слоев приводит к появлению множества различных дефектов, особенно вблизи границы раздела подложка–напыляемый материал [11, 12]. С другой стороны, атомы последнего осаждаемого слоя также находятся в условиях, которые отличаются от реализуемых в объеме материала (например, отсутствие соседей с одной из сторон). Это приводит к перестройке слоя, а также соседних к нему, и, как следствие, количество дефектов в граничных атомарных слоях увеличивается. Описанное выше подтверждается структурным анализом тонких сверхпроводящих пленок [13]. Таким образом, количество дефектов на границах сверхпроводящего слоя больше, чем в его толщине. В результате длина свободного пробега электронов ( $l$ ) уменьшается при приближении к границам. Учет данного аспекта осуществляется за счет использования следующего модельного распределения  $l(x)$  [2, 14]:

$$l(x) = l_{Cn} \left( 1 - \eta \left( \frac{x}{D} - \frac{1}{2} \right)^2 \right). \quad (1)$$

На границах сверхпроводящего слоя  $l(0) = l(D) = l_{Cn}(1 - \eta/4)$ . Если  $\eta = 0$ , то выражение (1) принимает вид  $l(x) = l_{Cn}$ , что соответствует случаю однородного слоя. В центре слоя  $l(x = D/2) = l_{Cn}$  независимо от значения параметра  $\eta$ . Таким образом,  $l_{Cn}$  – значение длины свободного пробега электронов в центре сверхпроводящего слоя, а  $\eta$  – параметр, характеризующий степень неоднородности сверхпроводящего слоя.

Система обобщенных уравнений Гинзбурга–Ландау для распределения  $l(x)$  вида (1) была сформулирована ранее [2, 14]:

$$\psi - \psi^3 + \left( 1 - \eta \left( \frac{x_\xi}{d} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\xi^2} - \frac{2\eta}{d} \left( \frac{x_\xi}{d} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_\xi} -$$

$$-\frac{U^2}{\kappa_{Cn}^2} \psi \left( 1 - \eta \left( \frac{x_\xi}{d} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\xi^2} - \frac{\psi^2}{\kappa_{Cn}^2} U \left( 1 - \eta \left( \frac{x_\xi}{d} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = 0, \quad (3)$$

где  $\kappa_{Cn}$  – параметр ГЛ в центре сверхпроводящего слоя,  $\psi = \Psi/\sqrt{a/2b}$  – нормированный параметр порядка. При выводе системы уравнений (2), (3) использовалась калибровка векторного потенциала  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

Поскольку транспортный ток  $I_t$  в слое создает магнитное поле  $H_I = \frac{2\pi}{c} I_t$ , то полное поле вблизи границ слоя равно  $H \pm H_I$ , и граничные условия к уравнению (3) имеют вид:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_\xi=0} = h - h_I, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_\xi=d} = h + h_I, \quad (4)$$

где  $h = \frac{H}{H_\xi}$ ,  $h_I = \frac{H_I}{H_\xi}$ ,  $H_\xi = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa_{Cn}^2\xi_{Cn}^2}$ .

В выражениях (2)–(4) используются безразмерные величины  $x_\xi = x/\xi_{Cn}$ ,  $d = D/\xi_{Cn}$ ,  $U(x_\xi) = \frac{2\pi\kappa_{Cn}\xi_{Cn}}{\phi_0} A$ , где  $\xi_{Cn}$  – длина когерентности ГЛ однородного слоя или длина когерентности ГЛ в центре неоднородного слоя,  $\phi_0$  – квант магнитного потока.

Добавим к функционалу свободной энергии сверхпроводящего слоя ( $F_S$ ) поправки, связанные с энергией его поверхностей:

$$F \propto F_S + \gamma|\Psi(0)|^2 + \gamma|\Psi(D)|^2,$$

где  $\Psi(x)$  – распределение параметра порядка по толщине слоя,  $\gamma$  – коэффициент в разложении энергии поверхностей сверхпроводящего слоя по степеням параметра порядка. В результате вариации функционала  $F$  по параметру порядка могут быть получены обобщенные граничные условия к уравнению (2):

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_\xi=0} = \frac{\psi(0)}{\Lambda(1-\eta/4)}, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_\xi=d} = -\frac{\psi(d)}{\Lambda(1-\eta/4)}, \quad (5)$$

где  $\Lambda$  – параметр с размерностью длины, по аналогии с работой [15] названный длиной экстраполяции. Стоит отметить, что согласно микроскопическим расчетам, граничные условия (5) при  $\Lambda \rightarrow \infty$  отвечают полному отражению электронов от границы раздела между сверхпроводником и несверхпроводящим материалом [16]. Этот случай, как правило, соответствует границе раздела сверхпроводник – изолятор/вакуум. Граничные условия (5) с конечными значениями  $\Lambda$  отвечают случаю, когда электроны проникают

через границу раздела материалов, что, как правило, соответствует границе раздела сверхпроводник–нормальный металл. Независимо от того, какое значение принимает  $\Lambda$ , граничные условия (5) обеспечивают равенство нулю нормальной к границе сверхпроводника компоненты плотности тока. При  $\Lambda \rightarrow \infty$  выполнение этого очевидно, а при конечных значениях  $\Lambda$  это реализуется за счет равенства потоков электронов через границу раздела из сверхпроводника в нормальный металл и в обратном направлении. Во втором случае взаимное влияние сверхпроводника и нормального металла обусловлено обменом электронами.

Процедура численного решения системы уравнений (2), (3) с граничными условиями (4), (5) аналогична, описанной в работе [8]. Считается, что все расчеты проводятся при некоторой фиксированной температуре, близкой к критической  $T_c$ .

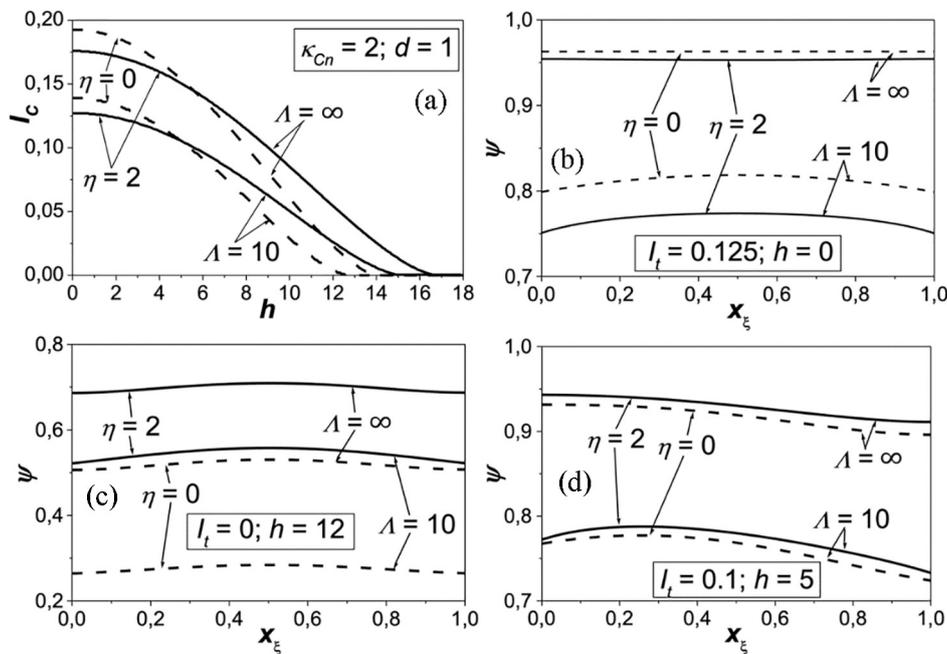


Рис. 2: (а) зависимости критического тока  $I_c$  от внешнего магнитного поля  $h$ . Параметры расчетов указаны на рисунке; (b)–(d) распределения параметра порядка  $\psi$  по толщине слоя  $d = 1$ . Параметр ГЛ в центре слоя  $\kappa_{Cn} = 2$ . Другие параметры расчетов указаны на рисунках.

Результаты численных расчетов. На рис. 2(а) представлены зависимости критического тока сверхпроводящего слоя ( $I_c$ ) от внешнего магнитного поля  $h$ . Стоит отметить, что конечные значения  $\Lambda$  отвечают случаю, когда граничащие слои влияют на сверхпроводящее состояние слоя, а ненулевые значения  $\eta$  соответствуют неоднородно-

му слою. Анализ показывает, что учет как неоднородности сверхпроводящего слоя, так и влияния граничащих с ним слоев, приводит к уменьшению величины рассчитанного критического тока, причем учет обоих факторов приводит к более ощутимому уменьшению оценки  $I_c$ . В случае критического магнитного поля ( $h_c$  – точка пересечения кривых  $I_c(h)$  с осью  $h$ ) учет влияния граничащих слоев приводит к уменьшению его значения, с другой стороны, при учете неоднородности сверхпроводящих свойств оценка  $h_c$  заметно увеличивается.

Для прояснения описанных явлений стоит рассмотреть трансформацию параметра порядка  $\psi(x_\xi)$  под действием транспортного тока  $I_t$  и внешнего магнитного поля  $h$ . Сначала обсудим сверхпроводящий слой, невзаимодействующий с граничащими слоями (случай  $\Lambda = \infty$ ). В отсутствие внешнего магнитного поля при протекании транспортного тока параметр порядка неоднородного слоя (случай  $\eta = 2$ ) будет меньше, чем однородного (случай  $\eta = 0$ , см. рис. 2(b)). С другой стороны, под влиянием внешнего магнитного поля в отсутствие транспортного тока ситуация будет обратная:  $\psi(x_\xi)$  неоднородного слоя будет больше при одинаковых значениях  $h$  (рис. 2(c)). Таким образом, сверхпроводящее состояние неоднородного слоя менее устойчиво к подавлению транспортным током и более устойчиво к подавлению внешним магнитным полем по сравнению с однородным слоем. Отметим, что при определенных значениях  $I_t$  и  $h$  данные тенденции уравнивают друг друга, и параметры порядка неоднородного и однородного слоев практически совпадают (см. рис. 2(d)). Таким образом, при определенной величине внешнего магнитного поля критические токи неоднородного и однородного слоев совпадают (см. рис. 2(a)).

Учет влияния граничащих слоев приводит к дополнительному подавлению параметра порядка  $\psi$  как при протекании транспортного тока  $I_t$ , так и при приложении внешнего магнитного поля  $h$ . Это приводит к уменьшению  $I_c$  и  $h_c$  сверхпроводящего слоя. В свою очередь влияние неоднородности слоя на его сверхпроводящее состояние остается таким же, как было описано для слоя, невзаимодействующего с граничащими слоями (рис. 2(b), (c)). Интересным результатом является то, что значение  $h$ , при котором критические токи однородного и неоднородного слоев совпадают, практически не изменяется относительно случая  $\Lambda = \infty$ . Более того, данное поле не зависит от степени неоднородности  $\eta$  (рис. 3(a)). Таким образом, при определенном значении внешнего магнитного поля критический ток сверхпроводящего слоя не зависит от его степени неоднородности. Вместе с тем, влияние соседних слоев на сверхпроводящее состояние слоя не изменяет этого поля.

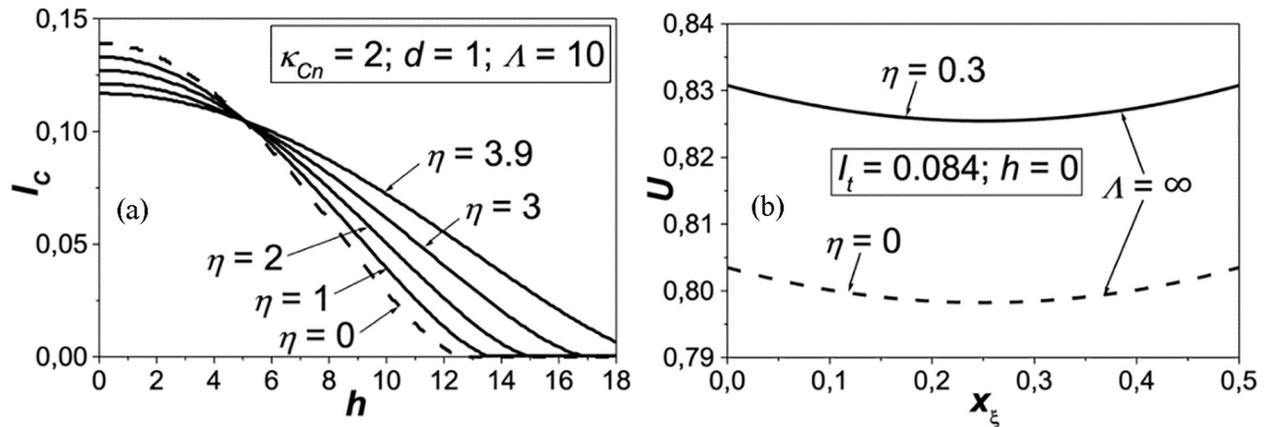


Рис. 3: (а) зависимости критического тока  $I_c$  от внешнего магнитного поля  $h$ . Параметры расчетов указаны на рисунке; (б) распределение векторного потенциала  $U$  по толщине слоя  $d = 0.5$ . Параметр ГЛ в центре слоя  $\kappa_{Cn} = 2$ . Другие параметры расчета указаны на рисунке.

Стоит отметить, что кривые зависимостей  $I_c(h)$  для случаев  $\eta = 0$ ,  $\Lambda = \infty$  и  $\eta = 2$ ,  $\Lambda = 10$  также имеют точку пересечения. В ней подавление сверхпроводящего состояния неоднородного слоя границами раздела и более сильным влиянием на него транспортного тока компенсируется более слабым подавлением сверхпроводящего состояния внешним магнитным полем. Эта точка пересечения соответствует полю, близкому к  $h_C$ . В сильных полях устойчивость сверхпроводящего состояния к подавлению магнитным полем играет более важную роль, и это позволяет компенсировать другие факторы (подавление транспортным током и окружающими слоями).

Для проверки проведем сравнение результатов численных и аналитических расчетов. Рассмотрим сверхпроводящий слой толщиной  $d = 0.5$  с  $\kappa_{Cn} = 2$ . Пусть  $I_t = 0.084$ , а  $h = 0$ . Если  $\Lambda = \infty$ , то согласно численным расчетам параметр порядка  $\psi$  практически не изменяется по толщине слоя. Рассмотрим рассчитанные численно распределения векторного потенциала  $U(x_\xi)$  (рис. 3(b)). Для однородного слоя ( $\eta = 0$ ) в предположении постоянства параметра порядка по толщине пленки  $U(x_\xi)$  задается известным соотношением [17], которое для выбранных параметров расчета принимает вид:

$$U(x_\xi) = \frac{H_I \cdot \text{ch}(\psi(x_\xi - 0.5d)/\kappa_{Cn})}{\psi \cdot \text{sh}(\psi d/2\kappa_{Cn})} \approx 0.798262 \cdot \text{ch}(0.458255(x_\xi - 0.25)). \quad (6)$$

Выражение (6) в полной мере описывает штриховую линию на рис. 3(b).

Для неоднородного слоя ( $\eta = 0.3$ ) при выбранных параметрах расчета уравнение (3) имеет вид одного из канонических уравнений параболического цилиндра [18]. Сплошная линия на рис. 3(b) совпадает с “четным” решением данного уравнения:

$$U(x_\xi) \approx 0.82546 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{(x_\xi - 0.25)^{2n}}{(2n)!},$$

где коэффициенты  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.21$ , остальные  $\alpha_n$  связаны рекуррентными соотношениями (см. [18]).

В заключение стоит отметить, что описанная в работе сверхпроводящая структура может быть реализована в виде узких сверхпроводящих мостиков с ровными границами, в которые не могут проникнуть вихри. Узость мостиков позволяет делать допущение, что ток однородно распределен по ширине. Примеры таких структур из ниобия представлены в работах [19, 20]. При их создании на поверхности или границе раздела сверхпроводник–подложка могут образовываться тонкие металлические слои, таким образом, они будут представлять собой слоистые N–S–N структуры. Увеличением толщины проводящего слоя за счет растекания сверхпроводящего тока по металлическим слоям можно пренебречь, так как их толщина существенно меньше, чем у мостиков.

Согласно расчетам в рамках теории ГЛ проникновение вихрей в описываемые структуры возможно, когда толщина сверхпроводящего слоя  $D > 1.81\xi$  [7, 8, 21]. В более тонких слоях реализуется безвихревое состояние, при котором критический ток определяется током распаривания ГЛ. В настоящей работе рассматривается именно такой случай. Вместе с тем, авторы статьи [19] приводят измеренное для тонкой сверхпроводящей ниобиевой пленки толщиной  $D \approx \xi(0)$  (длины когерентности при нулевой температуре) значение плотности критического тока  $7.5 \text{ MA/cm}^2$ . Сравнение полученного значения с рассчитанной плотностью тока распаривания ( $15.9 \text{ MA/cm}^2$ ) показало более чем двукратное превышение последнего, что, по мнению авторов, может быть связано с погрешностями при определении параметров структуры, а также образованием на поверхности пленки тонкого несверхпроводящего металлического слоя при ее создании. Последнее предположение согласуется с выводами, сделанными в настоящей работе.

*Заключение.* В работе получены следующие результаты:

1) показано, что рассчитанный критический ток неоднородного слоя, для которого учтено влияние граничащих слоев, существенно меньше, чем для однородного слоя, невзаимодействующего с граничащими слоями. Вместе с тем, в литературе описаны

эксперименты на узких и тонких сверхпроводящих мостиках, для которых учет таких факторов, как неоднородность сверхпроводящего слоя и влияние на него соседних слоев важен для корректной оценки величины критического тока;

2) установлено, что при некоторой величине внешнего магнитного поля критический ток тонкого сверхпроводящего слоя не зависит от его степени неоднородности. При этом влияние соседних слоев на сверхпроводящее состояние такого слоя не приводит к существенному изменению величины данного поля.

Результаты настоящей работы позволяют улучшить оценки критических параметров сверхпроводящих пленок и слоистых структур за счет учета таких факторов, как их неоднородность по толщине и влияние граничащих несверхпроводящих слоев.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема “Физика высокотемпературных сверхпроводников и новых квантовых материалов”, № 0023-2019-0005).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] S. S. Wang, G. Q. Zha, *Int. J. Mod. Phys. B* **29**, 1550009 (2015). DOI: 10.1142/S0217979215500095.
- [2] P. I. Bezotosnyi, K. A. Dmitrieva, S. Y. Gavrilkin, et al., *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **30**(3), 7500107 (2021). DOI: 10.1109/TASC.2020.3047695.
- [3] П. И. Безотосный, К. А. Дмитриева, *ФТТ* **63**, 1471 (2021). DOI: 10.1134/S106378342110005X.
- [4] A. Podlivaev, I. Rudnev, *Supercond. Sci. Technol.* **30**, 35021 (2017). DOI: 10.1088/1361-6668/aa55aa.
- [5] С. Ю. Гаврилкин, А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков, П. И. Безотосный, *Краткие сообщения по физике ФИАН* **45**(2), 29 (2018). DOI: 10.3103/S1068335618020045.
- [6] П. И. Безотосный, С. Ю. Гаврилкин, К. А. Дмитриева и др., *ФТТ* **61**, 234 (2019). DOI: 10.1134/S1063783419020069.
- [7] П. И. Безотосный, С. Ю. Гаврилкин, А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков, *Краткие сообщения по физике ФИАН* **41**(6), 3 (2014). DOI: 10.3103/S1068335614060013.
- [8] П. И. Безотосный, С. Ю. Гаврилкин, А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков, *ФТТ* **57**, 1277 (2015). DOI: 10.1134/S1063783415070070.

- [9] G. F. Zharkov, V. G. Zharkov, A. Y. Zvetkov, Phys. Rev. B **61**, 12293 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevB.61.12293.
- [10] А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков, Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ **128**, 392 (2005). DOI: 10.1134/1.2047800.
- [11] А. Э. Муслимов, Диссертация докт. физ.-мат. наук: 01.04.18. – ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН, Москва, 2018. – 313 с.
- [12] М. В. Ловыгин, Диссертация канд. физ.-мат. наук: 01.04.10. – Нац. исслед. ун-т МИЭТ, 2015. – 136 с.
- [13] S. Richter, S. Aswartham, A. Pukenas, et al., IEEE Trans. Appl. Supercond. **27**, 1 (2017). DOI: 10.1109/TASC.2016.2633303.
- [14] П. И. Безотосный, К. А. Дмитриева, С. Ю. Гаврилкин и др., Краткие сообщения по физике ФИАН **47**(2), 20 (2020). DOI: 10.3103/S1068335620020025.
- [15] Е. А. Андриюшин, В. Л. Гинзбург, А. П. Силин, УФН **163**, 105 (1993). DOI: 10.1070/ru1993v036n09abeh002311.
- [16] Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **50**, 1055 (1966).
- [17] В. В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников* (МЦНМО, 2000).
- [18] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (National Bureau of Standards, 1964).
- [19] K. Ilin, D. Henrich, Y. Luck, et al., Phys. Rev. B **89**, 184511 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevB.89.184511.
- [20] N. Pinto, S. J. Rezvani, A. Perali, et al., Sci. Rep. **8**, 4710 (2018). DOI: 10.1038/s41598-018-22983-6.
- [21] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (Dover Publications, 1996).

Поступила в редакцию 18 апреля 2023 г.

После доработки 6 января 2024 г.

Принята к публикации 9 января 2024 г.