

УДК 530.1

О ВОЗМОЖНЫХ 3-ГРАВИТОННЫХ ВЕРШИНАХ

А. И. Никишов

В борновском приближении я сравниваю поперечные сечения рассеяния гравитона на ньютоновском центре в трех случаях, используя 1) 3-гравитонную вершину общей теории относительности, 2) 3-гравитонную вершину, в которой источником гравитона является должным образом выбранный гравитационный тензор энергии-импульса, 3) в качестве иллюстрации другой возможности выбора я использую псевдотензор Ландау и Лифшица в низшем приближении. При углах рассеяния θ порядка единицы все три случая приводят к различным сечениям. Таким образом в принципе можно узнать какую вершину использует Природа. Отмечено, что энергия поля в некоторых случаях может оказаться нелокализуемой.

Ключевые слова: рассеяние гравитона, ньютоновский центр, 3-гравитонная вершина.

1. Введение. Решение вопроса о сечении рассеяния гравитона на ньютоновском центре может прояснить природу 3-гравитонной вершины.

Как настаивал В. Фок, произвол в выборе координатной системы в общей теории относительности (и тем самым неоднозначность решения) – это недостаток теории, а не достоинство. Единственное решение получается в привилегированной системе координат, а другие системы координат следует использовать только после того, как указана их связь с привилегированной системой, см. Введение и §96 в [1]. В случае решения Шварцшильда неоднозначность проявляется в том, что рассматриваются три формы решения: 1) стандартная (см. Гл. 8, §2 в [2]); другое название (conventional) используется в [3], 2) гармоническая и 3) изотропная, см. Гл. 8, §2 в [2].

Если источник гравитона известен, привилегированная система получается использованием пропагатора.

Для получения сечений мы должны знать 3-гравитонную вершину. Она состоит из кубических по $\hbar$ членов, в которых виртуальный гравитон ньютоновского центра

свертывается с тензором энергии-импульса падающего и рассеянного гравитонов или с его аналогом в случае общей теории относительности (ОТО). В последнем случае 3-гравитонная вершина получается разложением $\sqrt{-g}R$ или его аналога без вторых производных до h^3 . При этом аналог тензора энергии-импульса двух реальных гравитонов не сохраняется, см., напр., [4]. Один из возможных видов вершины в этом случае имеет форму $\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$, приведённую в §6 в [5] и состоит из 13 членов. Каждое h берётся в низшем приближении.

Мы используем обозначения

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad \eta_{ik} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad h_{ik,l} = \frac{\partial}{\partial x^l} h_{ik}. \quad (1)$$

Как правило мы считаем скорость света $c = 1$. Для ньютоновского центра $h_{ik} = -2\delta_{ik}\phi$, $\phi = -\frac{Gm}{r}$. Это согласуется с гармонической системой координат, как и ожидал Фок. В случае решения Шварцшильда неоднозначность ОТО проявляется в том, что рассматриваются три формы метрики. Это 1) стандартная (см. Гл. 8, §2 в [4]; другое название *conventional* [3], 2) гармоническая и 3) изотропная (см. Гл.8, §2 в [2]).

Стандартную систему координат получить из ньютоновского источника $t_{ik}^{Nc} = \delta_{i0}\delta_{k0}m$ (m – масса звезды) с помощью пропагатора нельзя. Заметим кстати, что сечения рассеяния квантовой частицы в 1) и 2) системах различны [6]. В ОТО h_{ik} в 3-гравитонной вершине свертывается с тензором, который не является сохраняющимся гравитационным тензором энергии-импульса. Утверждается, что последний никогда не нужен. Одним из аргументов в пользу этого является то, что имеется бесконечное множество сохраняющихся гравитационных тензоров энергии-импульса, см. стр. 466 в [7]. Однако из бесконечного числа этих тензоров можно выбрать подходящий, если есть принцип выбора. В качестве такого принципа я беру требование положительности плотности энергии. Как отмечал Швингер, энергия по самой сути положительна, см. текст ниже формулы (4.33), Гл. 2 в [8]. Следовательно, и плотность энергии положительна, поскольку она получается делением энергии в элементе объёма на его объём. Мой тензор энергии-импульса гравитационного поля t_{ik}^{MTW} , полученный в [9], совпадает в ньютоновском приближении с тензором энергии-импульса в задаче 1 в §106 в [10]:

$$\theta_{00} = \mu\phi + \frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2 + \frac{\mu v^2}{2}. \quad (1a)$$

Точнее, там сказано как его получить из приведённого там же действия. В (1a) μ – плотность частиц. Только член $\mu\phi$ здесь отрицателен. Это допустимо, поскольку он

является лишь частью большой величины μc^2 , то есть плотности энергии покоя, которая осталась за кадром в нерелятивистской записи. Далее интегрирование по частям даёт

$$-\int \frac{1}{2}\mu\phi dV = \frac{1}{4\pi G} \int (\nabla\phi)^2 dV. \quad (1b)$$

Этому уравнению есть аналог в электродинамике, см. формулу (16.1) в [11].

Некоторые считают, что только в правой части подынтегральное выражение имеет смысл дифференциального распределения. Я не вижу для этого оснований. Тогда следует считать, что оба подынтегральных выражения равны в том смысле, что энергия в этом случае нелокализуема, ср. с §20.4 в [7]. Это обстоятельство не должно препятствовать существованию тензора-энергии-импульса. Иначе было бы невозможно вычислить гравитационное излучение гравитационных систем. Окончательная формула в Задаче 1 §106 [9] такова:

$$W = -\frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2.$$

Это выражение нарушает принцип Швингера.

Примером тензора, не удовлетворяющего условию положительности плотности энергии, является псевдотензор Ландау и Лифшица: $t_{00}^{LL} = -\frac{7}{(8\pi G)}[\nabla\phi]^2 < 0$, см., напр., уравнение (20.29) в [7]. Псевдотензор Ландау и Лифшица не содержит членов с производными выше первой.

Среди гравитационных тензоров энергии-импульса, рассмотренных в [5], только один удовлетворяет требованию положительности, а именно t_{00}^{MTW} , см. также [9]. Этот тензор получен методом теории поля для безмассового поля спина 2, подобно тому, как это делал Тирринг [10a]. В нерелятивистском случае этот тензор даёт также правильное выражение для величины $\frac{1}{2}\mu\phi$, см. (1a) с учётом (1b). Это свойство можно использовать в качестве принципа выбора тензора энергии-импульса вместо принципа Швингера. Удивительно, что тензор t_{ik}^{MTW} совершенно не нужен в общей теории относительности.

2. *Матричные элементы.* Я использую обозначения [12], см. там подстрочное примечание на странице 1289.

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= e_{\alpha}e_{\beta}, \quad e_{\pm\alpha}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1, 0,), \\ e_{\pm\alpha}^*(k') &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp \cos\theta, i, \pm \sin\theta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \\ k_i &= (-\omega, 0, 0, \omega) = (-k_0, 0, 0, k_3), \quad i = (0, 1, 2, 3), \quad \vec{k}'_{\alpha} = \omega(1, \sin\theta, 0, \cos\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $e_{+\alpha\beta}(k) = e_{+\alpha}(k)e_{+\beta}(k)$ – соответствует падающему гравитону с положительной спиральностью; $e_{+\alpha\beta}^*(k') = e_{+\alpha}^*(k')e_{+\beta}^*(k')$ – соответствует рассеянному гравитону с отрицательной спиральностью

$$I_{+-} = (k_\alpha e_{+\alpha\beta}^*(k'))(k'_\alpha e_{-\alpha\beta}(k)), \quad I_{++} = (k_\alpha e_{+\alpha\beta}^*(k'))(k'_\alpha e_{+\alpha\beta}(k)).$$

Четыре величины входят в матричные элементы

$$\begin{aligned} I_1 &= (k_\alpha e^*(k')_{\alpha\beta})(k'_\sigma e_{\sigma\beta}(k)), \\ I_2 &= k \cdot k' e_{\alpha\beta}(k) e_{\alpha\beta}^*(k'), \\ I_3 &= (k \cdot k' + 2\omega^2) e_{\alpha\beta}(k) e_{\alpha\beta}^*(k'), \quad (k \cdot k') = \vec{k} \cdot \vec{k}' - \omega^2, \\ I_4 &= \omega^2 e_{\alpha\beta}(k) e_{\alpha\beta}^*(k'). \end{aligned} \quad (3)$$

В спиральные амплитуды входят величины

$$I_{1+-} = 2\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad I_{1++} = -2\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2}. \quad (4)$$

$$I_{4+-} = \omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}, \quad I_{4++} = \omega^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

Для матричных элементов в наших четырех случаях получим

$$M^{GR} = 2I_4, \quad M^{MTW} = 2(I_4 - I_1), \quad M^{LL} = -2I_1 + I_2 + I_3. \quad (6)$$

Они связаны соотношением

$$M^{LL} = M^{MTW} + \frac{k \cdot k'}{\omega^2} M^{GR}, \quad \frac{k \cdot k'}{\omega^2} = -2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Общий множитель в (6) опущен, но он и не нужен потому, что в случае ОТО сечение хорошо известно, поскольку вычислялось многими авторами и проверялось мною в свое время.

3. Поперечные сечения. В ОТО получим

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{GR}}{d\Omega} &= 4r_g^2 \frac{|I_{4+-}|^2 + |I_{4++}|^2}{q^4} = \frac{r_g^2}{4} \frac{\cos^8 \frac{\theta}{2} + \sin^8 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \\ q^2 &= 4\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad r_g = 2mG, \quad c = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Это согласуется с [12] и другими авторами, см., напр., [13]. Это существенная проверка для двух других случаев 2) и 3), поскольку они отличаются от рассматриваемого случая ОТО только коэффициентами перед членами, входящими в гравитационный тензор

энергии-импульса, формирующего вершину. Эти коэффициенты для первых двух случаев приведены в Таблице 1 в [9].

Для случаев 2) и 3) получим

$$\frac{d\sigma^{MTW}}{d\Omega} = r_g^2 \frac{|M^{MTW}|^2}{q^4}, \quad \frac{d\sigma^{LL}}{d\Omega} = r_g^2 \frac{|M^{LL}|^2}{q^4}, \quad (8)$$

где M^{MTW} и M^{LL} даны в (6).

4. *Заключение.* Для малых углов рассеяния $\theta \ll 1$ поперечные сечения во всех рассмотренных случаях одинаковы и совпадают с сечением рассеяния классической безмассовой частицы. Для угла θ порядка единицы все сечения различны. Таким образом, в принципе можно узнать, какой вариант выбрала Природа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения* (М., 1955).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Willy, N.Y., 1972).
- [3] M. J. Duff, Phys. Rev. D **7**, 2317 (1973).
- [4] Padmanabhan, gr-qc/0409089.
- [5] А. И. Никишов, ЭЧАЯ **32**(1), 5 (2001). <http://www1.jinr.ru/Archive/Pepan/v-32-1/1.htm>.
- [6] А. И. Никишов, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(4), 31 (2018). <https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=34843926>.
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorn, J. A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, 1973).
- [8] J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields*, Vol. 1 (Addison-Wesley, 1970).
- [9] А. И. Никишов, ЭЧАЯ **37**(5), 1466 (2006).
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 2. Теория поля*, 6 изд. (М., изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1973).
- [11] И. Е. Тамм, *Основы теории электричества* (М.-Л., Гостехиздат, 1949). – 628 с.
- [12] J. Gross, R. Jacki, Phys. Rev. **166**, 1287 (1968).
- [13] F. A. Berends, R. Gastmans, Nucl. Phys. **B88**, 99 (1975).

Поступила в редакцию 12 октября 2022 г.

После доработки 21 марта 2024 г.

Принята к публикации 22 марта 2024 г.