УДК 523.9

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭВОЛЮЦИИ СЛАБОГО ВОЗМУЩЕНИЯ, ЗАДАННОГО НА ГРАНИЦЕ ГОРЯЧЕЙ КОРОНАЛЬНОЙ ПЕТЛИ В СИЛЬНОМ МАГНИТОМ ПОЛЕ

А. С. Фролова[2], Д. И. Завершинский[1,2], Н. Е. Молевич[1,2]

Магнитоакустические волны активно используются в качестве средства диагностики параметров плазмы и процессов, происходящих в ней. В данной работе исследуется задача об эволюции слабого возмущения заданного в основании корональной петли. Рассмотрение проводится в предположении, что плазма находится в сильном магнитном поле таком, что эволюция медленных магнитоакустических и энтропийных мод может быть описана в рамках уравнений газовой динамики с высокой степенью точности. Спектр исследуемых волн полагается таким, что основным источником дисперсии и диссипации волн является теплопроводность среды. В рамках указанных приближений найдено точное решение граничной задачи для линейного эволюционного уравнения с помощью метода Фурье, а также принципа Дюамеля. Полученное точное аналитическое решение может быть использовано для интерпретации результатов наблюдений, а также численного моделирования медленных магнитоакустических и энтропийных волн в солнечной короне.

Ключевые слова: МГД-волны, солнечная корона, корональная петля.

Введение. Корональные петли являются одним из наиболее распространенных типов магнитных структур в солнечной короне. Периодически в подобных структурах

[1] Самарский филиал Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, 443011 Россия, Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

[2] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, 443086 Россия, Самара, Московское ш., 34; e-mail: ArtificialDarkness@yandex.ru.

наблюдаются быстро затухающие бегущие возмущения сжатия [1], видимые как изменение интенсивности, распространяющееся вдоль петли. Наблюдаемые изменения интенсивности часто ассоциируют с медленными магнитоакустическими (МА) волнами и применяют для задач МГД-сейсмологии [2].

В зависимости от требований, предъявляемых к точности, и параметрам исследуемой плазмы, для описания свойств медленных МА волн могут быть использованы различные модели. Для случаев, когда толщина волновода играет существенную роль в динамике волны, имеет смысл использовать модели магнитной трубки или магнитного слоя, описанные в классических трудах Степанова и Зайцева [3], а также Эдвин и Робертса [4]. Изначально данный подход предполагал плазму адиабатической. Учет влияния неадиабатических процессов нагрева и радиационного охлаждения проводился в работах [5, 6]. Несмотря на свою общность, данный подход является неудобным для быстрых оценок, так как требует решения трансцендентных дисперсионных уравнений. По этой причине часто для схожих задач используется приближение тонких потоковых трубок [7]. Однако для случаев сильных магнитных полей влиянием дисперсии, обусловленной геометрией волновода, на медленные магнитоакустические волны можно пренебречь по сравнению с эффектами дисперсии, обусловленными неадиабатическими процессами [8, 9]. В этом случае оптимальным подходом для описания медленных МА волн является применение уравнений Навье–Стокса [10, 11].

Для анализа слабых возмущений решение полной системы уравнений не является необходимым, и достаточно использовать эволюционное уравнение, полученное из исходной системы в линейном приближении теории возмущений. При проведении сейсмологических оценок параметров корональной плазмы обычно применяется дисперсионное уравнение, которое находится путем поиска решения эволюционного уравнения в виде гармонической волны (см., напр., [12, 13]). В ряде исследований наблюдаемое возмущение интенсивности ассоциируют с динамикой только медленной МА волны и применяют для диагностики таких параметров плазмы, как температура, коэффициент теплопроводности и т. д. Однако индуцированное возмущение является суперпозицией не только медленных магнитоакустических волн, но и энтропийных волн, которые одновременно с медленными волнами возбуждаются в системе. По этой причине не всегда корректно проводить прямую ассоциацию между бегущим возмущением и медленной волной, бегущей на фоне стационарного невозмущенного состояния системы и, в частности, применять аналитические выражения для времени затухания и фазового сдвига между возмущениями различных параметров плазмы, например, температуры и плотности. В этом случае корректное описание может быть получено только с помощью точного решения эволюционного уравнения, способного описать совместный вклад собственных мод в наблюдаемое возмущение.

Ранее для задач МГД-сейсмологии были найдены решения задачи Коши для эволюционного уравнения, описывающего динамику произвольного возмущения в случае определяющего вклада теплового дисбаланса [14] и в случае определяющего вклада от процесса теплопроводности [15]. Однако возмущение может быть индуцировано не только внутри самой петли, но и на его границе. В частности, путем сравнения периода модуляции амплитуды в разных слоях было показано, что медленные магнитоакустические волны, наблюдаемые в солнечных пятнах, были индуцированы фотосферными p-модами, распространяющимися вверх в корону [16]. Схожий механизм возбуждения был также исследован в работе [17]. Другим возможным механизмом индицирования медленных волн считают впрыскивания горячей плазмы в основании петли [18, 19]. Кроме того, возмущения, индуцированные в основании петли, иногда могут быть вызваны и вспышечными событиями [10, 20]. Для подобных случаев требуется уже решение граничной задачи. В настоящей работе получено точное решение граничной задачи для эволюционного уравнения, описывающего динамику возмущения скорости в случае определяющего вклада от процесса теплопроводности.

Модель и основные уравнения. Линейное эволюционное уравнение, описывающее одномерную динамику возмущения скорости медленных магнитоакустических и энтропийных волн в рамках приближения бесконечно сильного магнитного поля с учетом влияния теплопроводности и теплового дисбаланса нагрева и радиационного охлаждения плазмы, может быть записано в следующем виде [11]:

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - c_s^2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial z^2} = \frac{\kappa}{\rho_0 c_v}\left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^2 \partial z^2} - c_{si}^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4}\right) - \frac{1}{\tau_v}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_{sq}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где u_1 – возмущение скорости $\left(\dfrac{u_1}{c_s} << 1\right)$. Здесь и далее, индекс "1" обозначает величину первого порядка малости, а индекс "0" обозначает невозмущенное стационарное решение, например, плотности ρ или температуры T. Величина κ – это коэффициент теплопроводности среды.

Характерные временные масштабы, на которых наиболее ярко проявляется дисперсия, вызванная тепловым дисбалансом нагрева и радиационного охлаждения, могут быть записаны в следующем виде:

$$\tau_v = \frac{c_v}{(\partial Q/\partial T)_\rho}, \quad \tau_P = \frac{c_p}{(\partial Q/\partial T)_\rho - \frac{\rho_0}{T_0}(\partial Q/\partial \rho)_T}. \tag{2}$$

Здесь c_v, c_p – удельная теплоемкость при постоянном объеме и давлении, $Q(\rho, T) = L(\rho, T) - H(\rho, T)$ – обобщенная функция тепловых потерь, равная разнице между радиационным охлаждением $L(\rho, T)$ и нагревом $H(\rho, T)$. В стационарных условиях $L(\rho_0, T_0) = H(\rho_0, T_0)$.

Характерный временной масштаб, связанный с теплопроводностью, можно оценить как:

$$\tau_{\text{cond}} = \frac{l^2 c_v \rho_0}{\kappa},$$

где l – характерный пространственный масштаб, который в данной работе мы полагали равным длине петли.

Адиабатическая c_s и изотермическая c_{si} скорости звука, а также характерная скорость c_{sq}, связанная с тепловым дисбалансом, могут быть записаны как:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T_0}{m}}, \quad c_{si} = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}, \quad c_{sq} = \sqrt{\frac{\gamma_q k_B T_0}{m}}, \tag{3}$$

где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = \dfrac{5}{3}$ – показатель адиабаты, $\gamma_q = \gamma \dfrac{\tau_v}{\tau_p}$ – низкочастотный показатель адиабаты [11].

Уравнение (1) применимо в случае, когда характерные временные масштабы теплового дисбаланса и теплопроводности одного порядка. В данной работе будет рассматриваться случай слабого влияния теплового дисбаланса на динамику волны и сильного влияния теплопроводности, т. е. мы будем полагать, что τ_v и τ_p намного больше характерного времени теплопроводности τ_{cond}. Таким образом, вторым членом в правой части уравнения (1) можно пренебречь.

Тогда эволюционное уравнение для МА и энтропийных волн с учетом сильного влияния теплопроводности может быть записано в безразмерной форме:

$$\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^3} - \gamma \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{z}^2} = \tilde{d} \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial^4 \tilde{\bar{u}}}{\partial \tilde{z}^4} \right), \tag{4}$$

$$\tilde{u} = \frac{u_1}{c_{si}}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_l}, \quad t_l = \frac{l}{c_{si}}. \tag{5}$$

Легко заметить, что основным управляющим параметром является безразмерное обратное характерное время теплопроводности:

$$\tilde{d} = \frac{t_l}{\tau_{\text{cond}}}. \tag{6}$$

Для простоты записи ниже и далее по тексту опустим знак волны над переменными, и будем полагать все величины безразмерными. Дополним уравнение (4) следующими граничными (7) и начальными (8) условиями:

$$u(0,t) = g(t), \quad u(l,t) = h(t), \tag{7}$$

$$u(z,0) = \varphi(z), \quad \frac{\partial u(z,0)}{\partial t} = \Psi(z), \quad \frac{\partial^2 u(z,0)}{\partial t^2} = \zeta(z). \tag{8}$$

Решение эволюционного уравнения. Для получения точного решения уравнения (4) применим подход, описанный ранее в [15]. Согласно данному подходу решение задачи Коши для уравнения (4) может быть найдено в виде суммы собственных функций с помощью метода разделения переменных. Удобство данного метода состоит в том, что наблюдаемое решение может быть представлено как суперпозиция двух медленных МА и одной энтропийной моды. Таким образом, возможно различать вклад различных мод в полное решение и анализировать их эволюцию по отдельности, а также изучать поведение отдельных гармоник этих собственных мод.

В случае граничной задачи, если мы запишем решение u уравнения (4) просто как сумму собственных функций, то оно не сможет удовлетворить неоднородным граничным условиям. Однако эта проблема может быть решена путем замены переменных. В этом случае задача о решении однородного уравнения в частных производных с неоднородными граничными условиями сводится к решению уже неоднородного уравнения в частных производных, но с однородными граничными условиями. Последнее можно решить, используя принцип Дюамеля.

Будем далее искать решение уравнения (4) как сумму двух функций $v(z,t)$ и $U(z,t)$:

$$u(z,t) = v(z,t) + U(z,t). \tag{9}$$

При этом потребуем от функции $U(z,t)$, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

$$U(0,t) = g(t), \quad U(l,t) = h(t). \tag{10}$$

После замены переменных уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \gamma \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial z^2} - \bar{d}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial z^4}\right) = -\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \gamma \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial z^2} + \bar{d}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 U}{\partial z^4}\right). \tag{11}$$

Уравнение (11) должно быть дополнено граничными и начальными условиями для функции $v(z,t)$.

Граничные условия:

$$v(0,t) = v(l,t) = 0. \tag{12}$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} v(z,0) &= \varphi(z) - U(z,0), \\ \frac{\partial v(z,0)}{\partial t} &= \Psi(z) - \frac{\partial U(z,0)}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 v(z,0)}{\partial t^2} &= \zeta(z) - \frac{\partial^2 U(z,0)}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для того чтобы функция $U(z,t)$ удовлетворяла условиям (10), её удобно положить равной линейной функции z:

$$U(z,t) = \frac{h(t) - g(t)}{l} z + g(t). \tag{14}$$

Тогда решение уравнения (4) с граничными и начальными условиями (7) и (8), соответственно, сводится к решению уравнения (15):

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \gamma \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial z^2} - \bar{d}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial z^2} - C_{si}^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4}\right) = -\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \tag{15}$$

с граничными и начальными условиями (12) и (13).

Применим далее ранее упомянутый принцип Дюамеля. Данный принцип состоит в том, что решение изначально неоднородного дифференциального уравнения в частных производных представимо в виде решения однородного дифференциального уравнения и его последующей подстановкой в интеграл Дюамеля.

Согласно результатам, представленным в работе [15], решение однородного уравнения $v_0(z,t)$ может быть найдено с помощью метода разделения переменных, в следующем виде:

$$v_0(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1n} e^{y_1 t} + e^{-b_1 t}\left(C_{2n}\cos(\mu t) + C_{3n}\sin(\mu t)\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right), \tag{16}$$

где введены следующие обозначения:

$$y_1 = -\frac{k^2 \bar{d}}{3} + A + B, \quad b_1 = -\frac{k^2 \bar{d}}{3} + \frac{A+B}{2}, \tag{17}$$

$$b_0 = -\frac{\bar{d}^2 k^4}{9} + k^2 \bar{d}\frac{A+B}{3} + (A^2 - AB + B^2), \quad \mu = \sqrt{b_0 - b_1^2}, \tag{18}$$

$$A = \sqrt[3]{-Q + \sqrt{P^3 + Q^2}}, \quad B = -\frac{P}{A}, \tag{19}$$

$$Q = \frac{k^4 \bar{d}(2k^2 \bar{d}^2 - 9(\gamma - 3))}{54}, \quad P = k^2 \frac{3\gamma - \lambda k^2 \bar{d}^2}{9}, \tag{20}$$

$$k = \left(\frac{\pi n}{l}\right). \tag{21}$$

Амплитуды C_{1n} для части решения, соответствующего энтропийной моде, и C_{2n}, C_{3n} для медленных магнитоакустических мод находятся из начальных условий (13) путем решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{gathered}
C_{1n} + C_{2n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)(\varphi(z) - U(z,0))dz, \\
y_1 C_{1n} - b_1 C_{2n} + \mu C_{3n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)\left(\Psi(z) - \frac{\partial U(z,0)}{\partial t}\right)dz, \\
y_1^2 C_{1n} + (b_1^2 - \mu^2) C_{2n} - 2\mu b_1 C_{3n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)\left(\zeta(z) - \frac{\partial^2 U(z,0)}{\partial t^2}\right)dz.
\end{gathered} \tag{22}$$

Введем следующий оператор, связанный с однородным уравнением как:

$$S_1(t)\begin{bmatrix} v(z,0) \\ \dfrac{\partial v(z,0)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 v(z,0)}{\partial t^2} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}e^{y_1 t} + e^{-b_1 t}\left(C_{2n}\cos(\mu t) + C_{3n}\sin(\mu t)\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right). \tag{23}$$

Тогда, зная решение однородного уравнения, решение неоднородного уравнения (15) теперь возможно выразить через интеграл Дюамеля следующим образом:

$$v(z,t) = S_1(t)\begin{bmatrix} v(z,0) \\ \dfrac{\partial v(z,0)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 v(z,0)}{\partial t^2} \end{bmatrix} + \int\limits_0^t S_1(z,t-s)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{\partial^3 U(z,s)}{\partial t^3} \end{bmatrix} ds, \tag{24}$$

где $S_1(z,t)$ – функция, являющаяся оператором, соответствующим решению (16) однородного уравнения.

Окончательно, с учетом записанного в явном виде решения (16) однородного уравнения, можно записать полное решение для возмущения скорости, описываемое линейным дифференциальным уравнением (4) в рамках приближения бесконечно сильного поля с учетом сильного влияния теплопроводности как:

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{1n}(z,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t S_{1n}(z,t-s)ds + U(z,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{y_1 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right) + e^{-b_1 t} \left(C_{2n} \cos(\mu t) + C_{3n} \sin(\mu t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Big(D_{1n} e^{y_1 (t-s)} \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right) + e^{-b_1 (t-s)} (D_{2n} \cos(\mu(t-s)) + D_{3n} \sin(\mu(t-s))) \Big) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right) ds + U(z,t). \quad (25)$$

Константы D_{1n}, D_{2n}, D_{3n} в полученном решении (25) могут быть выражены с помощью выбранной функции U (14) и рассматриваемых граничных условий (7) путем решения линейной системы алгебраических уравнений вида:

$$D_{1n} + D_{2n} = 0,$$

$$y_1 D_{1n} - b_1 D_{2n} + \mu D_{3n} = 0,$$

$$y_1^2 D_{1n} + (b_1^2 - \mu^2) D_{2n} - 2\mu b_1 D_{3n} = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right) \left(-\frac{\partial^3 U(z,s)}{\partial t^3}\right) dz. \quad (26)$$

Заключение. В данной работе получено решение граничной задачи для линейного дифференциального уравнения, описывающее динамику возмущения скорости в медленных МА и энтропийных волнах в корональных петлях в рамках приближения бесконечно сильного поля с учетом диссипации и дисперсии за счет теплопроводности. Анализируя выражения для амплитуд гармоник (22) и (26), легко показать, что в общем случае инициирования на границе возмущения спектрального состава, и, в частности, для случая гармонического входного сигнала, в среде одновременно возбуждаются обе магнитоакустические моды, а также энтропийная мода. Другими словами, задача сейсмологического анализа плазмы даже в простейшем случае не может быть сведена к задаче о распространении одной волны внутри волновода. Для анализа необходимо применять полное решение, описывающее поведение всех собственных мод системы. Подробный анализ различных режимов возбуждения возмущений в плазменном волноводе выходит за формат кратких сообщений и будет представлен в последующих публикациях.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-10008 (https://rscf.ru/project/23-22-10008/) и Правительства Самарской области.

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. De Moortel, Space Sci. Rev. **149**(1), 65 (2009). DOI: 10.1007/s11214-009-9526-5.

[2] Y. Taroyan, R. Erdélyi, Sol. Phys. **149**(1-4), 229 (2009). DOI: 10.1007/s11214-009-9506-9.

[3] В. В. Зайцев, А. В. Степанов, Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике солнца **37**, 3 (1975) [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1975IGAFS..37....3Z.

[4] B. Roberts, Sol. Phys. **87**(1), 77 (1983). DOI: 10.1007/BF00151162.

[5] R. A. M. van der Linden, M. Goossens, Solar Physics **131**(1), 79 (1991). DOI: 10.1007/BF00151746.

[6] D. V. Agapova, S. A. Belov, N. E. Molevich, D. I. Zavershinskii, Mon. Not. R. Astron. Soc. **514**(4), 5941 (2022). DOI: 10.1093/mnras/stac1612.

[7] Y. D. Zhugzhda, Phys. Plasmas **3**(1), 10 (1996). DOI: 10.1063/1.871836.

[8] T. J. Duckenfield, D. Y. Kolotkov, V. M. Nakariakov, Astron. Astrophys. **646**, A155 (2021). DOI: 10.1051/0004-6361/202039791.

[9] D. Y. Kolotkov, D. I. Zavershinskii, V. M. Nakariakov, Plasma Phys. Control. Fusion **63**(12), 124008 (2021). DOI: 10.1088/1361-6587/ac36a5.

[10] T. Wang, L. Ofman, X. Sun, et al., The Astrophysical Journal **860**(2), 107 (2018). DOI: 10.3847/1538-4357/aac38a.

[11] D. I. Zavershinskii, D. Y. Kolotkov, V. M. Nakariakov, et al., Phys. Plasmas **26**(8), 82113 (2019). DOI: 10.1063/1.5115224.

[12] A. Prasad, A. K. Srivastava, T. Wang, Sol. Phys. **296**(6), 105 (2021). DOI: 10.1007/s11207-021-01846-w.

[13] L. Ofman, T. Wang, Astrophys. J. **926**(1), 64 (2022). DOI: 10.3847/1538-4357/ac4090.

[14] D. Zavershinskii, D. Kolotkov, D. Riashchikov, N. Molevich, Sol. Phys. **296**(6), 96 (2021). DOI: 10.1007/s11207-021-01841-1.

[15] D. I. Zavershinskii, N. E. Molevich, D. S. Riashchikov, S. A. Belov, Front. Astron. Sp. Sci. **10**, 1167781 (2023). DOI: 10.3389/fspas.2023.1167781.

[16] S. Krishna Prasad, D. B. Jess, E. Khomenko, Astrophys. J. **812**(1), L15 (2015). DOI: 10.1088/2041-8205/812/1/L15.

[17] D. B. Jess et al., Astrophys. J. **757**(2), 160 (2012). DOI: 10.1088/0004-637X/757/2/160.

[18] M. Selwa, K. Murawski, S. K. Solanki, Astron. Astrophys. **436**, 701 (2005) [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2005A&A...436..701S.

[19] T. J. Wang, S. K. Solanki, W. Curdt, et al., Astron. Astrophys. **406**(3), 1105 (2003). DOI: 10.1051/0004-6361:20030858.

[20] Y. Taroyan, R. Erdélyi, J. G. Doyle, S. J. Bradshaw, Astron/ & Astrophys. **438**(2), 713 (2005). DOI: 10.1051/0004-6361:20052794.

Поступила в редакцию 1 мая 2024 г.

После доработки 3 июня 2024 г.

Принята к публикации 4 июня 2024 г.