УДК 531.51

ВЕЙНБЕРГОВСКИЙ ПСЕВДОТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПОЛЯ ШВАРЦШИЛЬДА

А. И. Никишов

Получен псевдотензор энергии-импульса Вейнберга для метрики Шварцшильда в гармонической системе координат. На горизонте событий этот псевдотензор имеет неинтегрируемые особенности. По этой причине полная энергия коллапсара не представима в виде интеграла от плотности энергии по объему системы.

В общей теории относительности нет тензора энергии-импульса гравитационного поля, но имеется бесконечное число псевдотензоров [1, 2]. Эту необычную ситуацию призвана объяснить концепция нелокализуемости гравитационного поля. Однако такая концепция представляется излишней, если строить теорию гравитации полевыми методами, не требуя общей ковариантности, или принять существование привилегированной системы отсчета. В общей относительности для изолированной системы привилегированной системой естественно считать гармоническую [3].

Псевдотензор Вейнберга (далее приставка псевдо опущена) выделен тем, что именно он является источником гравитационного поля [4]. Поэтому представляет интерес вычислить его для решения Шварцшильда в гармонической системе, переходящей в систему Минковского вдали от гравитирующего тела. Ввиду свойств пространства-времени под горизонтом событий и поменявшейся там роли временной и радиальной координат [5] следует ожидать, что представление полной энергии коллапсара в виде интеграла от плотности энергии по объему окажется невозможным. Вычисления подтверждают это: тензор энергии-импульса имеет неинтегрируемые особенности на горизонте событий.

Мы используем в основном обозначения Вейнберга, но в отличие от него обозначаем гармонические координаты x_i, $r = |\mathbf{x}|$ маленькими буквами. Индексы у $h_{\mu\nu}$, $R^{(1)}_{\mu\nu}$, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ поднимаются и опускаются с помощью η, а индексы у общековариантных тензоров, таких как $R_{\mu\nu}$, поднимаются и опускаются с помощью g. Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},\ \eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1),\ \phi = -\frac{GM}{r}, \qquad (1)$$

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{1+\phi}{1-\phi}dt^2 - (1-\phi)^2 d\mathbf{x}^2 - \frac{1-\phi}{1+\phi}\phi^2\frac{(\mathbf{x}d\mathbf{x})^2}{r^2}. \quad (2)$$

Приведем теперь уравнения (7.6.3) и (7.6.4) из [4]. Точные уравнения Эйнштейна записаны там в виде

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa}R^{(1)} = -8\pi G[T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}], \quad (3)$$

где

$$t_{\mu\kappa} = \frac{1}{8\pi G}\left[R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}g_{\mu\kappa}R - R^{(1)}_{\mu\kappa} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa}R^{(1)}\right], \quad (4)$$

а $R^{(1)}_{\mu\kappa}$ – линейная по h часть $R_{\mu\kappa}$:

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}\left[h_{,\mu\kappa} - h^\lambda_{\mu,\lambda\kappa} - h^\lambda_{\kappa,\lambda\mu} + h^\lambda_{\mu\kappa,\lambda}\right],\ h_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}h. \quad (5)$$

Уравнение (3) имеет форму, присущую волновому уравнению для спина 2. Источником является $T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}$. Следовательно, $t_{\mu\kappa}$ (т.е. тензор энергии-импульса гравитационного поля) также является источником поля. На уравнение (3) можно смотреть как на следствие итерационного решения уравнений Эйнштейна. В линейном приближении $h_{\mu\nu} = h^{(1)\mu\nu}$ генерируется материальным тензором. Вставляя это решение линеаризованного уравнения в (4) и удерживая квадратичные по $h^{(1)}$ члены, получим $t^{(2)}_{\mu\kappa}$. [См. ф. (7.6.14) в [4], в которой явно не отмечено, что фигурирующие там $h_{\mu\nu}$ – это $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Полученное по этой формуле $t^{(2)}_{\mu\nu}$ для ньютоновского центра приведено в [6]. Оно совпадает с формулами (11), (13), найденными ниже разложением точных выражений.] Далее $t^{(2)}_{\mu\nu}$ согласно волновому уравнению генерирует $h^{(2)}_{\mu\nu}$ и т.д. Сумма по всем приближениям дает $h_{\mu\kappa}$, точно удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна.

Далее вплоть до формулы (14) предполагается, что в рассматриваемой области нет материи. Тогда тензор энергии-импульса имеет вид

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G}\left[\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} - R^{(1)}_{\mu\nu}\right],\ R^{(1)} = R^{(1)\lambda}_{\lambda} = h^\lambda_{,\lambda} - h^{\mu\nu}_{,\mu\nu},\ h = h^\lambda_\lambda. \quad (6)$$

Из (1-2) и (5-6) находим

$$h = 2\phi^2 - 4\phi - 4 + \frac{2}{1-\phi} + \frac{2}{1+\phi},\ h^\lambda_{,\lambda} = \frac{4}{r^2}\phi^2\left[\frac{1}{(1-\phi)^3} + \frac{1}{(1+\phi)^3} + 1\right],$$

$$h_{ij} = (1-\phi)^2\delta_{ij} + \frac{\phi^2-\phi^3}{1+\phi}\frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij}, \quad (7)$$

$$h_{ij,kl} = \frac{2x_i x_j x_k x_l}{r^6}\left(-12\phi^2 + 15\phi - 8 + \frac{3}{1+\phi} + \frac{3}{(1+\phi)^2} + \frac{2}{(1+\phi)^3}\right) +$$

$$+\frac{2\delta_{ij}x_kx_l}{r^4}(4\phi^2-3\phi)+\frac{2\delta_{ij}\delta_{kl}}{r^2}(\phi-\phi^2)+\frac{\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}}{r^2}\left(-\phi^2+2\phi-2+\frac{2}{1+\phi}\right)+$$

$$+\frac{2}{r^4}[x_ix_j\delta_{kl}+x_kx_j\delta_{il}+x_ix_k\delta_{jl}+x_jx_l\delta_{ik}+x_ix_l\delta_{jk}]\left(2\phi^2-3\phi+2-\frac{1}{1+\phi}-\frac{1}{(1+\phi)^2}\right). \quad (8)$$

С помощью этих выражений получим

$$R^{(1)}_{kl}=\frac{x_kx_l}{r^4}\left(2\phi^2-2+\frac{1}{1+\phi}+\frac{1}{(1+\phi)^2}-\frac{1}{1-\phi}-\frac{1}{(1-\phi)^2}+\frac{2}{(1-\phi)^3}\right)+$$

$$+\frac{\delta_{kl}}{r^2}\left(2-\frac{3}{1+\phi}+\frac{1}{(1+\phi)^2}+\frac{1}{1-\phi}-\frac{1}{(1-\phi)^2}\right),$$

$$R^{(1)}=\frac{1}{r^2}\left(2\phi^2+4+\frac{4}{1-\phi}-\frac{8}{(1-\phi)^2}+\frac{4}{(1-\phi)^3}-\frac{8}{1+\phi}+\frac{4}{(1+\phi)^2}\right), \quad (9)$$

$$t_{kl}=\frac{1}{8\pi G}\left[\frac{x_kx_l}{r^4}\left(-2\phi^2+2-\frac{1}{1+\phi}-\frac{1}{(1+\phi)^2}+\frac{1}{1-\phi}+\frac{1}{(1-\phi)^2}-\frac{2}{(1-\phi)^3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta_{kl}}{r^2}(\phi^2-\frac{1}{1+\phi}-\frac{1}{(1+\phi)^2}+\frac{1}{1-\phi}+\frac{1}{(1-\phi)^2}-\frac{2}{(1-\phi)^3})\right]. \quad (10)$$

Для $\phi << 1$ имеем

$$t_{ik}|_{\phi<<1}=\frac{\phi^2}{8\pi G}\left[\frac{7\delta_{ik}}{r^2}-\frac{14x_ix_k}{r^4}\right]. \quad (11)$$

Аналогично найдем

$$t_{00}=\frac{1}{8\pi Gr^2}\left(\frac{4}{1+\phi}-\frac{2}{(1+\phi)^2}-\phi^2-2\right), \quad (12)$$

$$t_{00}|_{\phi<<1}=-\frac{3}{8\pi G}(\nabla\phi)^2=-\frac{3GM^2}{8\pi r^4}. \quad (13)$$

Проверим, что законы сохранения $t^{\mu\nu}_{,\nu}=0$ выполнены. Поскольку $t_{i0}=0$, нужно убедиться, что $t_{ni,n}=0$. Непосредственное вычисление дает

$$R^{(1)}_{ni,n}=\frac{1}{2}R^{(1)}_{,i}=$$

$$\frac{x_i}{r^4}\left[-4-4\phi^2+\frac{4}{1+\phi}+\frac{4}{(1+\phi)^2}-\frac{4}{(1+\phi)^3}-\frac{2}{1-\phi}-\frac{2}{(1-\phi)^2}+\frac{10}{(1-\phi)^3}-\frac{6}{(1-\phi)^4}\right],$$

что и требовалось показать.

Введя тензор

$$Q^{\rho\nu\lambda}=\frac{1}{2}\left[h^{,\nu}\eta^{\rho\lambda}-h^{,\rho}\eta^{\nu\lambda}-h^{\mu\nu}_{,\mu}\eta^{\rho\lambda}+h^{\mu\rho}_{,\mu}\eta^{\nu\lambda}+h^{\nu\lambda,\rho}-h^{\rho\lambda,\nu}\right], \quad (14)$$

обладающий свойством $Q^{\rho\nu\lambda} = -Q^{\nu\rho\lambda}$, имеем соотношение (см. гл. 7, §6 в [4])

$$Q^{\rho\nu\lambda}_{,\rho} = R^{(1)\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta^{\nu\lambda}R^{(1)} = -8\pi G\tau^{\nu\lambda}, \tag{15}$$

$$\tau^{\nu\lambda} = \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\kappa}[T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}].$$

В силу этого свойства для гладкого тензора $Q^{\rho\nu\lambda}$ интеграл по пространству от плотности энергии (гравитационного поля и материи) можно выразить через интеграл по удаленной поверхности от потока (см. [4])

$$P^0 = -\frac{1}{8\pi G}\int Q^{i00}_{,i} d^3x = -\frac{1}{8\pi G}\int Q^{i00} n_i r^2 d\Omega = M, \tag{16}$$

$$Q^{i00} = \frac{1}{2}(h_{jj,i} - h_{ij,j}) = \frac{x_i}{r^2}\left(2 - \phi^2 - \frac{2}{1+\phi}\right),$$

n_i – компоненты внешней нормали к поверхности. Однако, если имеется горизонт событий, то из (10) и (12) видно, что при $\phi = -1$ (т.е. при $r = GM$ в гармонической системе координат) тензор $t_{\mu\kappa}$ имеет неинтегрируемые особенности. Это делает невозможным применение теоремы Гаусса в области, содержащей особенности. Однако легко найти энергию вне сферы радиуса $r_1 = GM(1+\delta)$:

$$\Delta P^0 = -\frac{r}{2G}\left(2 - \phi^2 - \frac{2}{1+\phi}\right)\Bigg|_{r_1}^{\infty}. \tag{17}$$

Для $0 < \delta << 1$ получим

$$\Delta P^0 = -M\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}\right). \tag{18}$$

Интересно сравнить (18) с результатом Денена [7]. В стандартных координатах Шварцшильда ($r' = r + GM$) он нашел для своего тензора энергии-импульса

$$\Delta P^0 = -GM^2\int\limits_{r'_1}^{\infty}\frac{dr'}{r'^2\left(1 - \frac{r_g}{r'}\right)^{3/2}} = M\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r'_1}}}\right). \tag{19}$$

Это выражение расходится корневым образом при $r'_1 \to r_g$.

Интересно, что в боксе 23.1 в [1] приведены аргументы в пользу того, что в сферически симметричном случае можно придать локальный смысл гравитационной плотности энергии. Согласно этим аргументам гравитационная энергия вне сферы, занятой материей, должна равняться нулю. В ньютоновском приближении такой учет гравитационной энергии соответствует учету притяжения между различными частями материи.

Не видно, как это можно примирить с (18) или (19) и с представлением о том, что нелинейные поправки к гравитационному полю генерируются гравитационным тензором энергии-импульса. По поводу неоднозначности тензоров энергии-импульса можно заметить следующее: если какой-либо тензор правильно описывает взаимодействие с гравитонами, то его естественно считать правильным.

Хотя сингулярность на горизонте считают фиктивной (со времен Леметра, см. бокс 31.1 в [1]) с этим трудно примириться. Физически она проявляется в невозможности космонавту, пересекшему ее, вернуться обратно, в неограниченном росте ускорения свободно падающей частицы (в статической системе) при приближении к горизонту, в отсутствие статической системы за горизонтом и в других необычных вещах.

Консервативная точка зрения на рассмотренные особенности состоит в том, что это есть намек на то, что в режиме сильного поля теория гравитации в будущем претерпит изменения и радикальных модификаций топологии пространства-времени не потребуется.

Автор благодарит В. И. Ритуса за полезные обсуждения и конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation, San Francisco, 1973.

[2] Goldberg J. N. Phys. Rev., **111**, 315 (1958).

[3] Fock V. The of Theory of Space-Time and Gravitation (2nd revised edition, Pergamon Press, New York, 1964).

[4] Weinberg S. Gravitation and Cosmology, New York, 1972.

[5] Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр. М., Наука, 1986.

[6] Nikishov A. I. HEP-TH/9903034.

[7] Dehnen H. Zeitschr. Phys., **179**, 76 (1964).

Поступила в редакцию 9 декабря 1999 г.