УДК 533.9.01

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА КВАНТОВОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. М. Игнатов

Предложена скобка Ли–Пуассона для квантового кинетического уравнения для функции Вигнера бесстолкновительной плазмы. В явном виде получены несколько первых инвариантов Казимира.

Ключевые слова: гамильтонова структура, функция Вигнера.

Для описания кинетических явлений в квантовой невырожденной плазме используется уравнение для функции Вигнера (напр., [1–4]). Ограничимся для простоты чисто электронной плазмой на компенсирующем фоне с плотностью n_0 и достаточно малыми фазовыми скоростями возмущений различных величин, когда можно пренебречь эффектами запаздывания. В этом случае динамика плазмы описывается уравнениями

$$\dot{f}(t,\boldsymbol{\tau}) = -\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\frac{\partial f(t,\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{r}} + e\int d\boldsymbol{\tau}' Q(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\varphi(t,\boldsymbol{r}')f(t,\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

$$\Delta\varphi(t,\boldsymbol{r}) = -4\pi e\left(\int d\boldsymbol{p} f(t,\boldsymbol{\tau}) - n_0\right), \tag{2}$$

где $e < 0$ – заряд, m – масса электрона, $\varphi(\boldsymbol{r})$ – потенциал электрического поля и точкой над символом обозначается производная по времени. В дальнейшем для краткости используется обозначение для шестимерного вектора $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$ и явная зависимость динамических переменных от времени опускается. Функция Вигнера $f(\boldsymbol{\tau})$ в (1) связана с одночастичной матрицей плотности, а электростатический потенциал в (1), (2) описывает влияние самосогласованного электрического поля. Ядро интегрального оператора правой части (1) имеет вид

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\tau}) &= i\frac{1}{\hbar}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\left[\delta(\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{k}/2)-\delta(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}/2)\right] = \\ &= \frac{2}{\hbar}\frac{1}{(\pi\hbar)^3}\sin(2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar). \end{aligned} \tag{3}$$

ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: aign@fpl.gpi.ru

Из вида ядра $Q(\boldsymbol{\tau})$ следует, что в пределе $\hbar \to 0$ уравнение (1) переходит в классическое уравнение Власова

$$\dot{f}(\boldsymbol{\tau}) = -\frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{r}} + e\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{p}}. \tag{4}$$

Функция Вигнера в (1) и функция распределения в (4) нормированы так, чтобы плотность числа частиц равнялась $n(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{p} f(\boldsymbol{\tau})$, при этом подразумевается, что полное число частиц $N = \int d\boldsymbol{\tau} f(\boldsymbol{\tau})$ равно большой, но конечной величине. В обоих случаях существуют естественные ограничения на функцию $f(\boldsymbol{\tau})$: в классической плазме (4) $f(\boldsymbol{\tau}) > 0$, а в квантовой плазме (1) функция Вигнера может быть отрицательной, но должно выполняться неравенство (напр., [2])

$$W_2(f) = \int d\boldsymbol{\tau} f(\boldsymbol{\tau})^2 \leq \frac{N^2}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{5}$$

причем равенство достигается для чистого состояния квантовой системы.

Как в квантовом, так и в классическом случаях выражение для полной энергии системы частиц можно записать в виде функционала $f(\boldsymbol{\tau})$

$$H = \int d\boldsymbol{\tau} f(\boldsymbol{\tau}) \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{2} \int d\boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{\tau}' \frac{f(\boldsymbol{\tau}) f(\boldsymbol{\tau}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{6}$$

Очевидно, что в обоих случаях это выражение является интегралом движения. При помощи уравнения Пуассона (2) легко показать, что вариационная производная энергии (6) $\dfrac{\delta H}{\delta f(\boldsymbol{\tau})} = \dfrac{p^2}{2m} + e\varphi(\boldsymbol{r})$ равна полной энергии одной частицы.

Под гамильтоновой структурой понимается форма записи динамических уравнений вида $\dot{f}(\boldsymbol{\tau}) = \{H(f), f(\boldsymbol{\tau})\}$, где гамильтониан $H(f)$ равен полной энергии (6). Скобка Пуассона должна быть антисимметричной $\{A, B\} = -\{B, A\}$ и удовлетворять тождеству Якоби $\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$. Для уравнения Власова (4) скобка Пуассона была предложена в работе [5] (см. также [6, 7]) и имеет вид

$$\begin{aligned} &\{A(f), B(f)\}^{\mathrm{cl}} = \\ &\int d\boldsymbol{\tau} f(\boldsymbol{\tau}) \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \left(\frac{\delta A(f)}{\delta f(\boldsymbol{\tau})} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\frac{\delta B(f)}{\delta f(\boldsymbol{\tau})} \right) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \left(\frac{\delta B(f)}{\delta f(\boldsymbol{\tau})} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\frac{\delta A(f)}{\delta f(\boldsymbol{\tau})} \right) \right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Это выражение представляет собой пример неканонической скобки Пуассона или скобки Ли–Пуассона, явно зависящей от координат фазового пространства, в роли которых выступает функция $f(\boldsymbol{\tau})$.

В настоящей заметке предложено аналогичное представление для квантового уравнения (1). Рассмотрим билинейную операцию над произвольными функционалами $A(f)$, $B(f)$

$$\{A,B\} = \int d\boldsymbol{\tau}_1 d\boldsymbol{\tau}_2 d\boldsymbol{\tau}_3 f(\boldsymbol{\tau}_1) R(\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_3 - \boldsymbol{\tau}_1) \frac{\delta A}{\delta f(\boldsymbol{\tau}_2)} \frac{\delta B}{\delta f(\boldsymbol{\tau}_3)}, \tag{8}$$

где

$$R(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = \frac{2}{\hbar^7 \pi^6} \sin\left[\frac{2}{\hbar}(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1)\right]. \tag{9}$$

Очевидно, что операция (8) антисимметрична.

Используя преобразование Фурье по пространственным переменным, легко вычислить интегралы

$$\begin{gathered}
\int d\boldsymbol{p}_2 R(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = Q(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_2)\delta(\boldsymbol{x}_1), \\
\int d\boldsymbol{x}_2 R(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = -Q(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x}_1)\delta(\boldsymbol{p}_1), \\
\int d\boldsymbol{\tau}_2 p_2^2 R(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = 2\delta(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla\delta(\boldsymbol{x}_1),
\end{gathered} \tag{10}$$

где функция $Q(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ дается выражением (3). При помощи интегралов (10) легко убедиться, что квантовое кинетическое уравнение (1) записывается в виде $\dot{f}(\boldsymbol{\tau}) = \{H(f), f(\boldsymbol{\tau})\}$. Немного более громоздкие вычисления позволяют убедиться, что для операции (8) выполняется тождество Якоби, то есть (8) является скобкой Пуассона. Разлагая функцию (9) в интеграл Фурье, можно показать, что в классическом пределе $\hbar \to 0$ скобка (8) переходит в (7).

Для билинейных операций вида (7) и (8) характерно существование инвариантов Казимира, то есть таких функционалов $C(f)$, которые коммутируют $\{C(f), A(f)\} = 0$ с произвольными функционалами $A(f)$. Для скобки (7) существует бесконечный набор инвариантов вида $C(f) = \int d\boldsymbol{\tau} F(f(\boldsymbol{\tau}))$, где $F(f)$ – произвольная функция своего аргумента. Существование подобных инвариантов связано с тем, что уравнение Власова (4) описывает течение несжимаемой жидкости в пространстве $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$.

В случае квантового уравнения (1) также существуют инварианты Казимира. Очевидно, что инвариантом является полное число частиц. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функционал (5), характеризующий отклонения состояния системы частиц от чистого состояния, также является инвариантом.

В общем случае инварианты Казимира для скобки (8) можно искать в виде суммы $C(f) = \sum_n \alpha_n C_n(f)$ с произвольными коэффициентами α_n однородных функционалов вида

$$C_n(f) = \int d\boldsymbol{\tau}_1 \dots d\boldsymbol{\tau}_{n-1} f(\boldsymbol{\tau}_1) \dots f(\boldsymbol{\tau}_n) w_n(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_n, \dots, \boldsymbol{\tau}_{n-1} - \boldsymbol{\tau}_n). \tag{11}$$

Подынтегральное выражение здесь можно симметризовать при помощи всех перестановок аргументов $\boldsymbol{\tau}_i$. Из условия $\{C_n(f), A(f)\} = 0$ для произвольного функционала $A(f)$ следует интегральное уравнение на функцию $w_n(\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_{n-1})$. В компактном виде его решение для произвольного порядка n записать не удается, но первые члены имеют простой вид:

$$\begin{gathered} w_3(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = \cos\left[\frac{2}{\hbar}(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1)\right], \\ w_4(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3) = w_3(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)\delta(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_3). \end{gathered} \tag{12}$$

Наличие инвариантов Казимира означает, что в процессе эволюции решение уравнений (1) или (4) с начальным условием $f(\boldsymbol{\tau})|_{t=0} = f_0(\boldsymbol{\tau})$ остается на некотором многообразии $C(f) = \mathrm{const}$, называемом симплектическим листом. Для уравнения Власова (4) можно найти систему координат на симплектическом листе, в которой уравнение записывается в канонической форме. При этом осуществляется переход к каноническим переменным $f(\boldsymbol{\tau}) \to P(\boldsymbol{\tau}), Q(\boldsymbol{\tau})$, в терминах которых уравнение (4) переписывается в виде $\dot{Q}(\boldsymbol{\tau}) = \dfrac{\delta H}{\delta P(\boldsymbol{\tau})}$, $\quad \dot{P}(\boldsymbol{\tau}) = -\dfrac{\delta H}{\delta Q(\boldsymbol{\tau})}$. Краткий обзор различных способов введения канонических переменных для уравнения Власова дан, напр., в [8]. Вопрос о канонических переменных для квантового уравнения (1) остается открытым.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М., Госатомиздат, 1961).

[2] F. Haas, *Quantum Plasmas: An Hydrodynamic Approach* (Springer New York, NY, 2011).

[3] П. К. Шукла, Б. Элиассон, УФН **180**, 55 (2010).

[4] С. В. Владимиров, Ю. О. Тышецкий, УФН **181**, 1313 (2011).

[5] P. J. Morrison, Phys. Lett. A **80**, 383 (1980).

[6] В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).

[7] А. М. Игнатов, Н. Г. Гусейн-заде, *Нелинейная теория неустойчивостей идеальной плазмы* (М., ЛЕНАНД, 2017).

[8] А. М. Игнатов, Физика плазмы **30**, 47 (2004).

Поступила в редакцию 28 июня 2024 г.

После доработки 27 августа 2024 г.

Принята к публикации 28 августа 2024 г.