

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

УДК 537.87

СОЛИТОНЫ ТОКА В НЕЛИНЕЙНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧ

Ф. М. Трухачёв^{1,2}, Н. В. Герасименко², М. М. Васильев¹, О. Ф. Петров¹

Проведен анализ электрических токов, возникающих в нелинейной линии передач при распространении в ней электромагнитного КдВ солитона. Получено аналитическое выражение для описания солитона тока. Показано, что он имеет классический профиль, который в приближении малых амплитуд описывается солитонным решением КдВ уравнения. Также рассчитаны профили напряжения между концами отрезка одного из проводников линии, показано что они имеют форму симметричных двухполярных импульсов.

Ключевые слова: солитоны, нелинейные линии передач, солитонные токи.

Введение. Солитоном называют нелинейную уединенную волну, которая существует благодаря балансу нелинейности и дисперсии среды [1]. Впервые уединенную волну описал Скотт Рассел, который наблюдал ее на поверхности водного канала [2]. Теоретическое описание феномена появилось спустя полвека благодаря работам Дидерика Кортвега и Густава Де Вриза [3]. Впоследствии, полученное ими уравнение получило название “уравнение КдВ”. Дальнейшие исследования выявили универсальную природу солитонов, они были обнаружены в нелинейных линиях передач [5, 14], плазме [15–19], кристаллических решетках [20, 21] и т. д.

В предлагаемой работе остановимся подробнее на анализе продольных токов, индуцируемых солитоном в нелинейных линиях передач. Нелинейные линии передач, и в особенности, их аналоги в виде последовательных LC -ячеек с подобранными нелинейными и дисперсионными характеристиками в мегагерцовом диапазоне частот являются удобными моделями нелинейных диспергирующих сред [11]. Такие модели, с одной стороны, допускают использование широко распространенных электронных компонентов,

¹ ОИВТ РАН, 125412 Россия, Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2.

² Белорусско-Российский университет, 212000 Беларусь, Могилев; e-mail: fttru@mail.ru.

а с другой, их параметры легко измерить с использованием доступного измерительного оборудования.

Ряд недавних работ посвящен исследованию электрических токов, индуцируемых солитонами в плазме [22–25]. В частности, показано, что солитоны могут осуществлять односторонний перенос заряженных частиц плазмы на несколько радиусов Дебая и генерировать при своем движении импульсные токи с ненулевой постоянной составляющей. Такие токи получили название “солитонные токи”. Как отмечалось выше, нелинейные линии передач являются универсальной моделью для анализа свойств солитонов, подходящей для экспериментального исследования феномена солитонных токов.

В предлагаемой работе впервые теоретически исследованы токи, индуцированные солитонами в нелинейной линии передач. В частности, получены аналитические выражения разной степени точности для описания солитонных токов, а также построены их профили.

Проведенные исследования имеют и прикладную значимость, связанную как с развитием новых радиотехнических приборов и методов передачи энергии и информации [26–30], так и с повышением безопасности эксплуатации линий электропередач. Анализ индуцированных импульсов напряжения и тока, возникающих в линиях электропередач при воздействии грозных разрядов, приведен в работах [31–38]. Одним из нелинейных элементов таких линий являются разрядники (см., напр., [38] стр. 35). Существующие теоретические модели описывают исключительно импульсы напряжения, в то время как анализ токов может оказаться более естественным, поскольку непосредственно связан с распределением избыточного электрического заряда молнии в линии передач. Задача данной работы показать, что импульс тока, индуцированный в нелинейной линии передач, имеет такую же форму и полярность, что и импульс напряжения между ее проводниками, а также получить аналитические выражения для описания солитонов тока.

Математическая модель. Рассмотрим бесконечную нелинейную электрическую линию, состоящую из двух проводников, емкость между которыми является функцией напряжения $C(U)$. Линия такого вида известна также как система Лехера [39]. Расстояние между проводами будем считать малыми по сравнению с длиной волны, возбуждаемой в такой линии, а длину самой линии ℓ , значительно превосходящей длину волны исследуемой волны (длинноволновой предел).

При отсутствии диссипации распределение напряжения U и тока I вдоль такой линии описывается известными телеграфными уравнениями [10]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t}, \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= C(U) \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $L, C(U)$ – индуктивность и емкость на единицу длины линии. Отметим также, что понятие напряжения (разности потенциалов) здесь справедливо в произвольном сечении линии, перпендикулярном направлению распространения волны.

Как правило, в экспериментальных и теоретических моделях, связанных с изучением солитонов в нелинейных линиях, используют дискретную схему замещения, представленную на рис. 1 (см., напр., [10]). При этом важно, чтобы ширина солитонов значительно превышала длину LC -ячейки.

В качестве нелинейных емкостей используют варикапы и варакторы, общий вид зависимости $C(U)$ для которых описывается выражением:

$$C(U) = C_0 \left(1 - \frac{U}{\varphi_k} \right), \quad (2)$$

где C_0 – емкость p - n перехода в невозмущенном состоянии, φ_k – барьерный потенциал p - n перехода. Как правило, $C_0 = 10^2 \dots 10^3$ пФ, $\varphi_k = 0.4 \dots 0.9$ В. Именно напряжение на нелинейной емкости U анализировали авторы всех известных нам работ по исследованию солитонов в нелинейных линиях передач. Нас же будет интересовать ток I , который в схеме замещения протекает через катушку индуктивности при движении нелинейной волны.

Рассмотрим кратко уже известные соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем. В [5, 11] на основе теории возмущений из системы (1) получено уравнение КдВ, описывающее напряжение на нелинейной емкости, которое можно записать через введенные выше параметры нелинейной емкости следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{12}{\varphi_k} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0,$$

где $\tau = t \cdot C_0/24$ – нормированное время. Данное уравнение совпадает с приведенным в [10, с. 59], если положить $a = 12/\varphi_k$.

Как известно, уравнение КдВ допускает солитонные решения вида

$$U(x, t) = \frac{(V-1)\varphi_k}{4} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{V-1}}{2} (x - v_s t) \right), \quad (3)$$

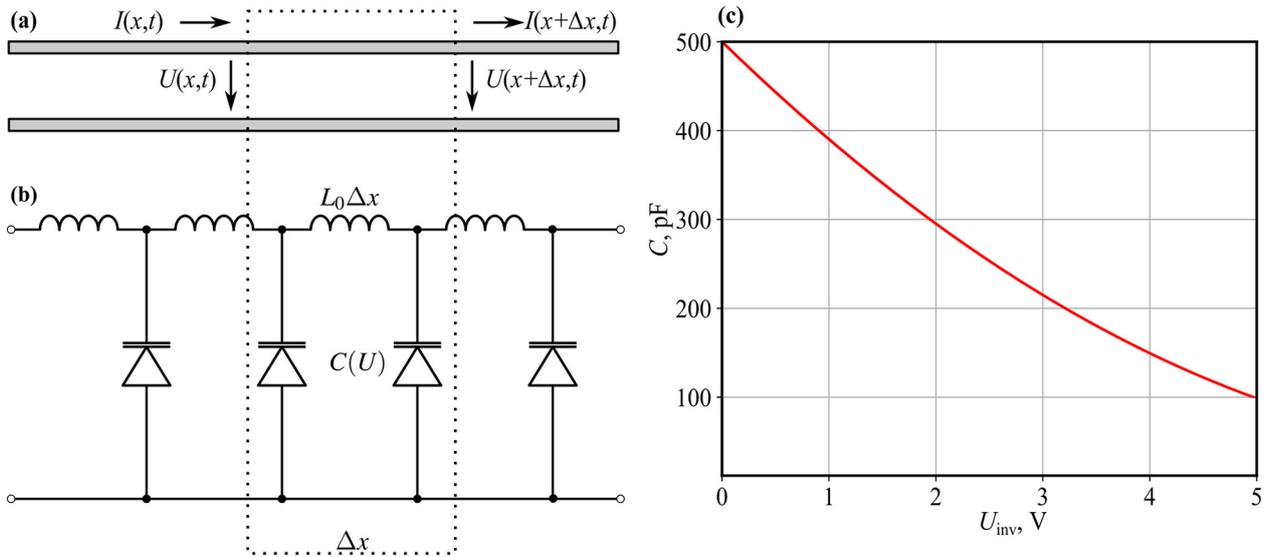


Рис. 1: (a) непрерывная двухпроводная линия передачи без потерь с заземлением; (b) ее эквивалентная электрическая схема; (c) стандартная вольт-фарадная характеристика варикапа.

где v_s – скорость солитона, $V = \frac{v_s}{v_0} = v_s\sqrt{LC_0}$ – нормированная скорость, $v_s = 1/\sqrt{LC_0}$ – фазовая скорость линейной волны в линии. Уравнение КдВ относительно тока можно вывести из системы (1), действуя в соответствии с рассуждениями, представленными в [10]. Однако более простым представляется вывод на основе уже известного выражения для солитона напряжения (3). Поскольку напряжение на нелинейном конденсаторе и ток в связанной с ним катушке индуктивности соответствуют одной и той же волне, то наша задача сводится к поиску тока в катушке при известном напряжении на конденсаторе. Разделив второе уравнение системы (1) на первое, можно получить выражение, связывающее ток и напряжение в линии:

$$\frac{dI}{dU} = \sqrt{\frac{C(U)}{L}}$$

и далее

$$I(x, t) = \int_0^U \sqrt{\frac{C(U)}{L}} dU. \quad (4)$$

Заметим, что в линейном приближении под знаком интеграла стоит константа, имеющая физический смысл обратного волнового сопротивления линии. Покажем, что в нелинейном случае эта величина также постоянна, но лишь в рамках уравнения КдВ, которое справедливо для малых амплитуд.

Подставив выражение (2) в уравнение (4) и вычислив полученный интеграл, получим

$$I(x, t) = 2\varphi_k \frac{1 - \left(1 - \frac{U}{\varphi_k}\right)^{3/2}}{3Z_0}. \quad (5)$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{L/C_0}$ – волновое сопротивление невозмущенной линии. В приближении малых амплитуд можно рассматривать напряжение волны U как малый параметр, разложение в ряд по которому дает:

$$I(x, t) = \frac{U}{Z_0} - \frac{U^2}{4Z_0\varphi_k} + O(U^3). \quad (6)$$

Далее, пренебрегая членами высших порядков, получим окончательно

$$I(x, t) \approx \frac{U}{Z_0}. \quad (7)$$

Основные результаты. Выражения (5) и (7) связывают искомый ток $I(x, t)$ в катушке и известное напряжение на конденсаторе $U(x, t)$ для случая малых амплитуд. В качестве $U(x, t)$ можно использовать как профили КдВ солитона, так и профили линейных и нелинейных кноидальных волн. Более того, можно использовать в качестве функции $U(x, t)$ и точные решения системы (1), а также солитонные решения уравнения КдВ второго порядка [40].

Нас интересует классический КдВ солитон тока, поэтому воспользуемся выражением (7), справедливым для малых амплитуд. Подставляя решение (3) в уравнение (7), получим окончательное выражение для солитона тока:

$$I(x, t) = \frac{(V-1)\varphi_k}{4Z_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{V-1}}{2} (x - v_s t) \right). \quad (8)$$

Как видно из сравнения выражений (3) и (8), амплитуда тока в нелинейной линии оказывается в Z_0 меньше амплитуды напряжения между ее проводниками, что также характерно для линейного случая. Отметим, что эта закономерность нарушается для солитонов большой амплитуды, что следует из выражения (5). Солитон тока, таким образом, имеет ту же ширину и ту же полярность, что и солитон напряжения. Однополярность профиля солитона соответствует одностороннему переносу заряда, что характерно для плазменных солитонов акустического типа [22–25].

Профили электрического тока, соответствующего солитону представлены на рис. 2(а)–(с) для разного значения скорости V , при $\varphi_k = 0.5$ В, $C_0 = 0.5 \cdot 10^{-9}$ пФ,

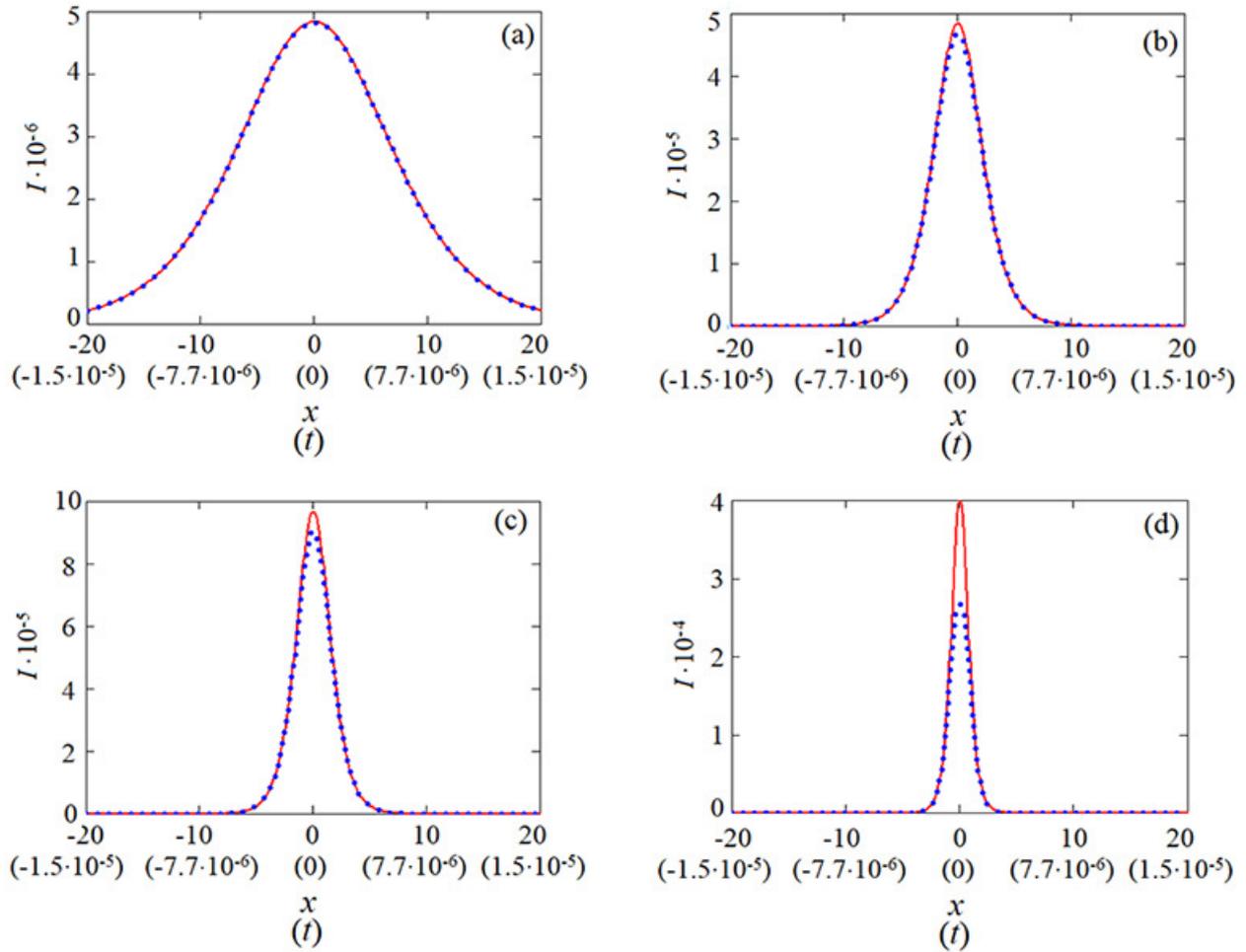


Рис. 2: Профили солитонов тока, полученные при помощи формул (7) (сплошные кривые) и (4) (пунктирные кривые). Параметры: $\varphi_k = 0.5$ В, $C_0 = 0.5 \cdot 10^{-9} n\Phi$, $L = 10^{-6}$ Гн; (a) $V = 1.05$; (b) $V = 1.5$; (c) $V = 2$; (d) $V = 5$.

$L = 10^{-6}$ Гн. Результаты получены в соответствии с формулами (5) и (7) – сплошная и штриховая линии, соответственно. В формуле (5) использовалось выражение (3).

Как видно из рис. 2, профиль тока хорошо описывается уравнением КдВ (уравнение (7)) при $V < 2$. Формулу (5) нужно использовать при анализе солитонов большой амплитуды. Очевидно, что профили $I(x)$, $I(t)$ совпадают с точностью до множителя на оси абсцисс. Время на рис. 2 отображено в круглых скобках на оси абсцисс. Отметим, что в экспериментах удобнее анализировать профили $I(t)$, точно измеряя ток в разрыве линии передач (между двумя соседними катушками). Амплитуда солитона тока пропорциональна его скорости, а ширина обратно пропорциональна корню квадратно-

му из скорости, что определяется свойствами уравнения КдВ. Для больших амплитуд указанные зависимости могут иметь другие асимптотики.

На практике удобнее измерять напряжение на катушке индуктивности, что не требует разрыва цепи. На рис. 3 представлены профили напряжения на катушке $U_L(t)$, соответствующие солитону тока в ней при $V = 1.5, 2$ и 5 . Профили рассчитаны по формуле $U_L = LdI/dt$ с использованием выражения (5).

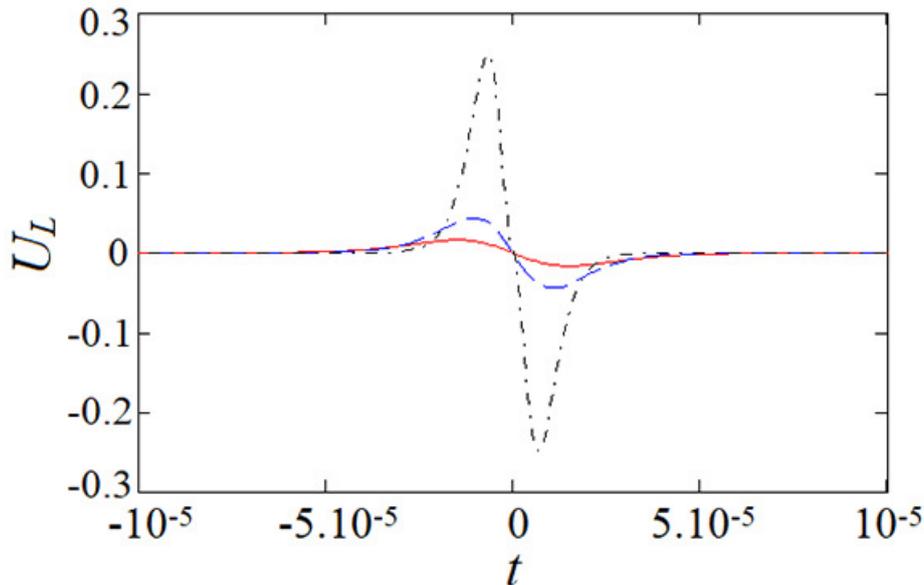


Рис. 3: Профили напряжения на катушке индуктивности, соответствующие солитонам тока при $V = 1.5$ (сплошная кривая), $V = 2$ (штриховая кривая), $V = 5$ (штрихпунктирная кривая). Остальные параметры соответствуют рис. 2.

Из рис. 3 видно, что солитону тока в нелинейной линии передач соответствует двухполярный импульс напряжения между концами некоторого ее отрезка (на катушке индуктивности на схеме замещения). Важно, что напряжение на катушке имеет величину порядка десятых долей вольта, в то время как величина тока в ней на три порядка меньше. Таким образом, на практике проще измерить напряжение на катушках и восстанавливать ток по формуле $U_L = LdI/dt$.

Заключение. Теоретически рассмотрена нелинейная электрическая линия передач, состоящая из двух проводников, емкость между которыми является функцией напряжения $C(U)$. С использованием телеграфных уравнений рассчитаны профили продольного электрического тока, возникающего при распространении в ней электромагнитного КдВ солитона. В некоторых источниках [11] такие солитоны называют видеосолито-

нами. Показано, что при малых амплитудах, профиль продольного тока хорошо описывается солитонным решением КдВ уравнения. Этот ток можно назвать солитоном тока в нелинейной линии передач. Получена формула для описания солитонов тока произвольной амплитуды, проведено сравнение профилей, полученных из выражений различного уровня точности. Солитон тока имеет форму однополярного импульса, что соответствует одностороннему переносу заряда электромагнитным солитоном. Данный результат находится в согласии с результатами анализа плазменных солитонов [22–25], что свидетельствует об универсальности свойств уединенных волн в различных средах.

Получены профили напряжения на концах отрезка одного из проводников линии передач. Этот профиль имеет форму двухполярного импульса. Показано, что амплитуда указанного профиля напряжения на несколько порядков выше амплитуды профиля тока, что может пригодиться на практике при анализе свойств солитонов тока.

Прикладная значимость исследований связана с развитием новых методов передачи информации, разработками элементной базы, а также с повышением безопасности эксплуатации линий электропередач.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (SIAM, Philadelphia, 1985).
- [2] J. S. Russell, Report of the Committee on Waves Report of the 7th Meeting of British Association for the Advancement of Science (Liverpool, John Murray, 1838), pp. 417–98.
- [3] D. J. Korteweg, G. De Vries, *Phil. Mag.* **39**(ser. 5), 422 (1895).
- [4] T. Yoshinaga, T. Kakutani, *Journal of the Physical Society of Japan* **53**(1), 85 (1984).
- [5] G. Sebastiano, P. Pantano, P. Tucci, *American Journal of Physics* **52.3**, 238 (1984).
- [6] T. Kuusela, J. Hietarinta, K. Kokko, R. Laiho, *Eur. J. Phys.* **8**, 27 (1987).
- [7] E. Afshari, A. Hajimiri, *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **40**(3), 744 (2005).
- [8] S. I. Mostafa, *Chaos, Solitons & Fractals* **39**(5), 2125 (2009).
- [9] D. L. Sekulic, M. V. Sataric, M. B. Zivanov, J. S. Bajic, *Elektronika Ir Elektrotehnika* **121**(5), 53 (2012).
- [10] M. Remoissenet, *Waves called solitons: concepts and experiments* (Springer Science, Business Media, 2013).
- [11] Д. Ч. Ким, *Журнал технической физики* **83.3**, 31 (2013).
- [12] M. A. Kayum, S. Ara, H. K. Barman, M. A. Akbar, *Results Phys.* **18**, 103269 (2020).

- [13] D. L. Sekulic, N. M. Samardzic, Z. Mihajlovic, M. V. Sataric, *Electronics* **10**, 2278 (2021).
- [14] A. Aksoy, S. Yenikaya, *Uludağ University Journal of The Faculty of Engineering* **27**(1), 389 (2022).
- [15] R. Z. Sagdeev, in *Reviews of Plasma Physics*, M. A. Leontovich, Ed. (Consultants Bureau Enterprises, Inc., New York, Vol. IV, 1966).
- [16] H. Washimi, T. Taniuti. *Phys. Rev. Lett.* **17**, 996 (1966).
- [17] K. E. Lonngren, in *Soliton ill Action*, edited by K. Lonngren and A. Scott (Academic, New York, 1978).
- [18] H. Ikezi, S. S. Wojtowicz, R. E. Waltz, et al., *Journal of Applied Physics* **64**, 3277 (1988).
- [19] S. Hussain, H. Hasnain, *Physics of Plasmas* **24**, 032106 (2017).
- [20] A. P. Chetverikov, W. Ebeling, M. G. Velarde, *Springer Series in Materials Science* **221**, 321 (2015). https://doi.org/10.1007/978-3-319-21045-2_13.
- [21] A. P. Chetverikov, W. Ebeling, E. Schöll, et al., *Eur. Phys. J. B* **92**, 122 (2019). <https://doi.org/10.1140/epjb/e2019-90715-8>.
- [22] I. Aleshin, D. Peregudov, *Moscow Univ. Phys. Bull.* **55**(1), 9 (2000).
- [23] F. M. Trukhachev, M. Vasiliev, O. F. Petrov, *High Temperature* **58**, 520 (2020).
- [24] A. E. Dubinov, X. I. Lebedeva, *Chaos, Solitons & Fractals* **152**, 111391 (2021).
- [25] F. M. Trukhachev, *Phys. Plasmas* **30**, 112302 (2023).
- [26] L. A. Ostrovsky, K. A. Gorshkov, V. V. Papko, *Phys. Scr.* **20**, 357 (1979).
- [27] H. Ikezi, S. S. Wojtowich, R. E. Waltz, et al., *J. Appl. Phys.* **64**(6), 3277 (1988).
- [28] T. Kuusela, J. Hietarinta, *Rev. Sci. Instrum.* **62**, 2299 (1991).
- [29] А. М. Бемянцев, А. И. Дубнев, С. Л. Климин и др., *ЖТФ* **65**(8), 132 (1995).
- [30] В. П. Губанов, А. В. Гунин, О. Б. Ковальчук и др., *Письма в ЖТФ* **35**(13), 81 (2009).
- [31] А. Н. Лагарьков, И. М. Руткевич, *ДАН СССР* **249**(3), 593 (1979).
- [32] О. А. Синкевич, Ю. В. Трофимов, *Докл. АН СССР* **249**(3), 597 (1979).
- [33] S. Yokoyama, K. Miyake, H. Mitani, A. Takanishi, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* **PAS-102**(8), 2420 (1983).
- [34] C. A. Nucci, F. Rachidi, M. V. Ianoz, C. Mazzetti, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **35**(1), 75 (1993).

- [35] В. В. Базуткин, К. П. Кадомская, М. В. Костенко и др., *Перенапряжения в электрических системах и защита от них* (Энергоатомиздат, 1995), 320 с.
- [36] A. V. Grakovski, A. I. Alexandrov, *Computer Modeling & New Technologies* **3**, 52 (1999).
- [37] H. Janani, R. Moini, S. H. H. Sadeghi, *IEEE Trans. Power Deliv.* **27**(1), 317 (2012).
- [38] M. Natsui, *Lightning Induced Overvoltages Caused by Non-Vertical Lightning and Earth Current Behavior* [Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. (2020) <https://publications.polymtl.ca/5328/>.
- [39] E. Lecher, *Wiedemann Annalen* **41**, 850 (1888).
- [40] T. Yoshinaga, T. Kakutani, *J. Phys. Soc. Jpn.* **53**, 85 (1984).

Поступила в редакцию 9 октября 2024 г.

После доработки 21 октября 2024 г.

Принята к публикации 22 октября 2024 г.