УДК 539.12.01

К РАСПАДУ $K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu$

Е. К. Каркарьян[1], К. В. Киселев[2], В. Ф. Образцов[3],
И. В. Сурков[2], М. И. Высоцкий[1]

Недавно коллаборация ОКА получила новое ограничение сверху на вероятность редкого распада $K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu$, которое оказалось в 65 раз меньше, чем имеющееся в настоящее время и приведенное в PDG. Однако оно все еще примерно в 10^4 раза хуже теоретического предсказания. Было выдвинуто предположение, что образование пиониума $A_{2\pi}$ в конечном состоянии полулептонного распада K^+ с последующим распадом $A_{2\pi} \to \pi^0\pi^0$ увеличит теоретическое значение вероятности распада, т. к. исчезнет подавление за счет пятичастичного фазового объема. Показано, что, несмотря на отсутствие этого подавления, распад $K^+ \to A_{2\pi}\pi^0 e^+\nu$ сильно подавлен из-за малости волновой функции пиониума в нуле.

Ключевые слова: редкие распады, K-мезоны, пиониум.

В недавней работе [1] было получено экспериментальное ограничение $Br(K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu) < 5.4 \times 10^{-8}$ на 90% у.д., что в 65 раз меньше приводящегося в [2] значения. Тем не менее полученная в рамках киральной теории возмущений оценка $Br(K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu) = 2.5 \times 10^{-12}$ [3] не позволяет надеяться на наблюдение этого распада в обозримом будущем. Как подчеркивается в [3] малость вероятности рассматриваемого распада по сравнению с наблюдаемым на эксперименте распадом $K^+ \to \pi^0\pi^0 e^+\nu$ обусловлена подавлением фазового объема. Проиллюстрируем последнее утверждение несколько подробнее.

Начнем с вычисления четырехчастичного фазового объема, характеризующего распад $K^+ \to \pi^0\pi^0 e^+\nu$. Исходной является рекуррентная формула, сводящая n-частичный

[1] ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: karkaryan@bk.ru.
[2] МФТИ, 141701 Россия, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
[3] НИЦ "Курчатовский институт" – ИФВЭ, 142281 Россия, Протвино.

фазовый объем к произведению i- и j-частичных $(n = i + j)$ [4] (рис. 1):

$$dV_n(s; m_1^2, m_2^2, ..., m_n^2) =$$

$$= \int \frac{dQ_1^2}{2\pi}\frac{dQ_2^2}{2\pi} dV_2(s; Q_1^2, Q_2^2) \times dV_i(Q_1^2; m_1^2, ..., m_i^2) \times dV_j(Q_2^2; m_{i+1}^2, ..., m_{i+j}^2). \tag{1}$$

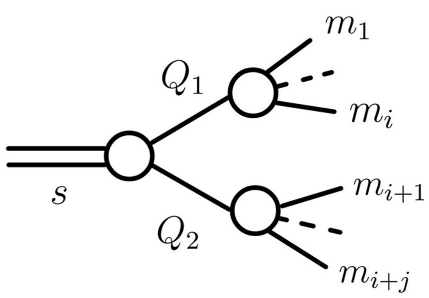

Рис. 1: *Иллюстрация к рекуррентной формуле* (1).

Принимая сумму импульсов e^+ и ν за Q_1, а сумму импульсов двух π^0-мезонов за Q_2, пренебрегая массами позитрона и нейтрино и используя выражения для двухчастичных фазовых объемов (рис. 2), получим:

$$V_4(s = m_K^2; 0, 0, m_{\pi^0}^2, m_{\pi^0}^2) =$$

$$= \int \frac{dQ_1^2}{2\pi}\frac{dQ_2^2}{2\pi} \frac{\sqrt{\left[s - (\sqrt{Q_1^2} - \sqrt{Q_2^2})^2\right]\left[s - (\sqrt{Q_1^2} + \sqrt{Q_2^2})^2\right]}}{8\pi s} \times \frac{1}{8\pi} \times \frac{\sqrt{Q_2^2(Q_2^2 - 4m_\pi^2)}}{8\pi Q_2^2}, \tag{2}$$

где $(m_K - 2m_{\pi^0})^2 > Q_1^2 > 0$, $(m_K - \sqrt{Q_1^2})^2 > Q_2^2 > 4m_{\pi^0}^2$. Переходя к безразмерным переменным $x = Q_1^2/m_K^2$, $y = Q_2^2/m_K^2$, получим:

$$V_4 = \frac{m_K^4}{2^{11}\pi^5} \times$$

$$\times \int\limits_0^{(1-2m_{\pi^0}/m_K)^2} dx \int\limits_{(2m_{\pi^0}/m_K)^2}^{(1-\sqrt{x})^2} dy \sqrt{[1 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2][1 - (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2]} \sqrt{1 - \frac{(4m_{\pi^0}/m_K)^2}{y}} =$$

$$= 7.1 \times 10^{-3} \frac{m_k^4}{2^{11}\pi^5}. \tag{3}$$

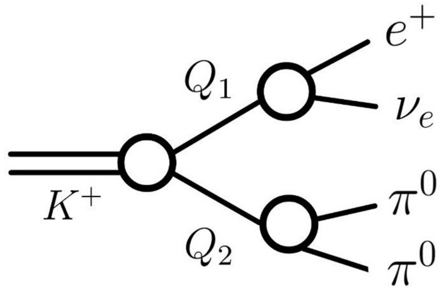

Рис. 2: *Иллюстрация к формуле* (2).

Для вычисления пятичастичного фазового объема, описывающего распад $K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu$ нам нужно выражение для фазового объема трех π^0-мезонов, причем, исходя из кинематики распада, мы можем ограничиться нерелятивистским приближением: $\sqrt{s} = 3m_{\pi^0} + \Delta$, $\Delta \ll m_{\pi^0}$. Используя рекуррентную формулу [4] (рис. 3)

$$dV_n(s; m_1^2, m_2^2, ..., m_n^2) = \int \frac{dQ^2}{2\pi} dV_{n-1}(Q^2; m_1^2, ..., m_{n-1}^2) \times dV_2(s; Q^2, m_n^2) \tag{4}$$

для трехчастичного фазового объема, получим:

$$V_3 =$$

$$= \int\limits_{(m_1+m_2)^2}^{(\sqrt{s}-m_3)^2} \frac{dQ^2}{2\pi} \frac{\sqrt{[Q^2-(m_1-m_2)^2][Q^2-(m_1+m_2)^2]}}{8\pi Q^2} \frac{\sqrt{[s-(\sqrt{Q^2}-m_3)^2][s-(\sqrt{Q^2}+m_3)^2]}}{8\pi s}. \tag{5}$$

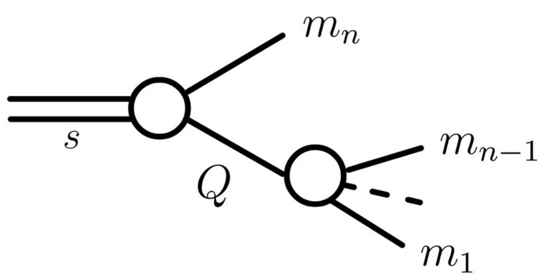

Рис. 3: *Иллюстрация к формуле* (4).

Полагая $m_1 = m_2 = m_3 = m_{\pi^0}$ в нерелятивистском пределе $\sqrt{s} - 3m_{\pi^0} \ll m_{\pi^0}$, получим:

$$V_3 = \frac{(\sqrt{s} - 3m_{\pi^0})^2}{2^6 3\sqrt{3}\pi^2}. \tag{6}$$

Для пятичастичного фазового объема из (1) получим (рис. 4):

$$dV_5(m_K^2; 0, 0, m_{\pi^0}^2, m_{\pi^0}^2, m_{\pi^0}^2) =$$

$$= \int \frac{dQ_1^2}{2\pi}\frac{dQ_2^2}{2\pi}\frac{\sqrt{\left[s-(\sqrt{Q_1^2}-\sqrt{Q_2^2})^2\right]\left[s-(\sqrt{Q_1^2}+\sqrt{Q_2^2})^2\right]}}{8\pi s}\times\frac{1}{8\pi}\times\frac{(\sqrt{Q_2^2}-3m_{\pi^0})^2}{2^6 3\sqrt{3}\pi^2}, \quad (7)$$

где $(m_K - 3m_{\pi^0})^2 > Q_1^2 > 0$, $(m_K - \sqrt{Q_1^2})^2 > Q_2^2 > 9m_{\pi^0}^2$. В безразмерных переменных получим:

$$V_5 = \frac{m_K^6}{2^{14}3\sqrt{3}\pi^6}\times \quad (8)$$

$$\times \int\limits_0^{(1-3m_{\pi^0}/m_K)^2} dx \int\limits_{(3m_{\pi^0}/m_K)^2}^{(1-\sqrt{x})^2} dy(\sqrt{y}-\frac{3m_{\pi^0}}{m_K})^2\sqrt{\left[1-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\right]\left[1-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\right]} =$$

$$= 1.37\times 10^{-6}\frac{m_K^6}{2^{14}3\sqrt{3}\pi^6}.$$

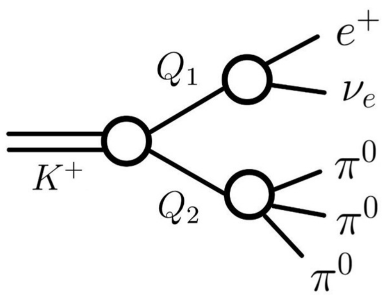

Рис. 4: *Иллюстрация к формуле* (7).

Наконец для отношения фазовых объемов с учетом тождественности π^0-мезонов получим:

$$\frac{m_K^2 V_4/2!}{V_5/3!} = 2.1\times 10^6, \quad (9)$$

в то время как в киральной теории возмущений для отношения ширин согласно [3] имеем:

$$\frac{\Gamma(K^+\to\pi^0\pi^0 e^+\nu)}{\Gamma(K^+\to\pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu)} \approx 3.4\times 10^6. \quad (10)$$

Таким образом практически все подавление ширин K_{e5} распадов обусловлено малостью пятичастичного фазового объема.

В связи с этим в работе [1] была выдвинута гипотеза, согласно которой образование пиониума $A_{2\pi}$[1] в распаде $K^+ \to \pi^0 A_{2\pi} e^+ \nu$ с последующим распадом $A_{2\pi} \to \pi^0\pi^0$ приведет к значительному увеличению вероятности распада $K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu$, т. к. пятичастичный фазовый объем заменяется на четырехчастичный.

Вычислим фазовый объем состояния $\pi^0 A_{2\pi} e^+\nu$, образующегося в распаде K^+-мезона. Формула (2) заменится на следующую (рис. 5):

$$V_A = \int \frac{dQ_1^2}{2\pi}\frac{dQ_2^2}{2\pi}\frac{\sqrt{[s-(\sqrt{Q_1^2}-\sqrt{Q_2^2})^2][s-(\sqrt{Q_1^2}+\sqrt{Q_2^2})^2]}}{8\pi s}\times\frac{1}{8\pi}\times \\ \times\frac{\sqrt{[Q_2^2-(\sqrt{4m_{\pi^+}^2}-\sqrt{m_{\pi^0}^2})^2][Q_2^2-(\sqrt{4m_{\pi^+}^2}+\sqrt{m_{\pi^0}^2})^2]}}{8\pi Q_2^2}, \tag{11}$$

где мы учли, что масса пиониума близка к сумме масс двух π^+-мезонов. В безразмерных переменных получим:

$$V_A = \frac{m_K^4}{2^{11}\pi^5}\int\limits_0^{(1-(2m_{\pi^+}+m_{\pi^0})/m_K)^2} dx \int\limits_{((2m_{\pi^+}+m_{\pi^0})/m_K)^2}^{(1-\sqrt{x})^2} dy\sqrt{[1-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2][1-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2]}\times \\ \times\sqrt{[1-\frac{(2m_{\pi^+}-m_{\pi^0})^2}{ym_K^2}][1-\frac{(2m_{\pi^+}+m_{\pi^0})^2}{ym_K^2}]} = 0.83\times10^{-4}\frac{m_K^4}{2^{11}\pi^5}, \tag{12}$$

что приводит к увеличению вероятности распада на множитель

$$\frac{m_K^2 V_A}{V_5/3!} \approx 5\times10^4, \tag{13}$$

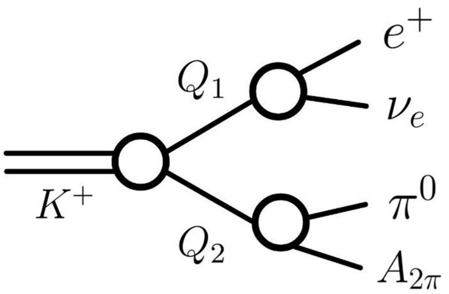

Рис. 5: *Иллюстрация к формуле* (11).

[1]связанный кулоновским взаимодействием $\pi^+\pi^-$-атом [5, 6].

в согласии с гипотезой работы [1]. Домножая теоретический результат на этот фактор, мы приходим к вероятности распада, превышающей примерно в два раза полученное в [1] верхнее ограничение (!). К сожалению, амплитуда перехода рождаемых в распаде K^+-мезона $\pi^+\pi^-$-мезонов в пиониум пропорциональна его волновой функции в нуле, $\psi(0) = 1/\sqrt{\pi a_B^3} \sim \alpha^{3/2}/(2\sqrt{2\pi})$, что приводит к подавлению вероятности этого распада множителем $\alpha^3/(8\pi) \approx 1.5 \times 10^{-8}$. Окончательно для вклада пиониума в вероятность распада $K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu$ получаем:

$$\Delta Br(K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu) = (2.5 \times 10^{-12}) \cdot (5 \times 10^4) \cdot (1.5 \times 10^{-8}) \approx 2 \times 10^{-15}, \qquad (14)$$

что на три порядка меньше, чем теоретическая оценка вероятности распада $K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 e^+\nu$, приведенная в [3]. Таким образом, вклад пиониума является незначительным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Кулик (От имени коллаборации ОКА), Письма в ЖЭТФ **120**(8), 578 (2024). https://doi.org/10.31857/S0370274X24100145.

[2] R. L. Workman et al. [Particle Data Group], PTEP **2022**, 083C01 (2022). DOI: 10.1093/ptep/ptac097.

[3] S. Blaser, Phys. Lett. B **345**, 287 (1995).

[4] Е. Бьюклинг, К. Каянти, *Кинематика элементарных частиц* (М., Мир, 1975).

[5] J. Uretsky, J. Palfrey, Phys. Rev. **121**, 1798 (1961).

[6] B. Adeva et al., Phys. Lett. B **704**, 24 (2011). https://arxiv.org/abs/1109.0569.

Поступила в редакцию 27 декабря 2024 г.

После доработки 2 апреля 2025 г.

Принята к публикации 9 апреля 2025 г.