

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНДУКЦИОННЫХ ТОКОВ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛЁНКЕ

С. Ю. Гаврилкин, А. Ю. Цветков

В работе представлена простая модель для расчёта распределения индуцированных токов в сверхпроводящей плёнке под действием локального переменного магнитного поля, создаваемого измерительной катушкой, учитывающая изменение плотности токов как в радиальном направлении, так и по толщине плёнки. Получено пространственное распределение пиковых значений плотности тока в образце, а также рассмотрен спектральный состав сигнала отклика в зависимости от амплитуды тока возбуждения. Проведено сравнение модельного отклика с экспериментальными данными.

Ключевые слова: сверхпроводящие плёнки, индукционная методика, многовитковая модель, нелинейный отклик.

Введение. Для определения критических параметров промышленных сверхпроводников, таких как ВТСП ленты 2-го поколения, широко используются бесконтактные индукционные методики, основанные на возбуждении в образце токов с помощью измерительной катушки и регистрации его отклика. В работе [1] нами была рассмотрена простая одномерная (1D) многовитковая модель, позволяющая получить радиальное распределение индукционных токов в тонкой (по сравнению с лондоновской глубиной проникновения магнитного поля λ) сверхпроводящей плёнке без учёта изменения плотности тока по толщине, а также рассчитать сигнал отклика образца на выводах измерительной катушки. Однако современные промышленные сверхпроводники [2] часто имеют толщину сверхпроводящего слоя, в несколько раз превышающую λ , что не позволяет пренебрегать распределением плотности индукционного тока по толщине. В связи с этим в данной работе предлагается двумерная (2D) многовитковая модель, позволя-

ющая рассчитать распределение индукционных токов как в радиальном направлении, так и по толщине плёнки.

Описание модели. Продолжая описанный в [1] подход, представим образец в виде сверхпроводящего диска толщиной d , над которым на расстоянии h (зазор) размещена измерительная катушка высотой H с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 , соответственно (см. рис. 1). Будем считать, что радиус данного диска существенно превышает R_2 . Мысленно разобьём образец на N_z слоёв толщиной dz , параллельных поверхности образца, а каждый из слоёв разобьём на N_r вложенных коаксиальных круговых контуров (со средними радиусами r_i и шириной dr) с центрами, находящимися на оси измерительной катушки. Таким образом, образец представляет собой систему из $N = N_r N_z$ контуров, а распределение тока в каждом контуре считаем однородным.

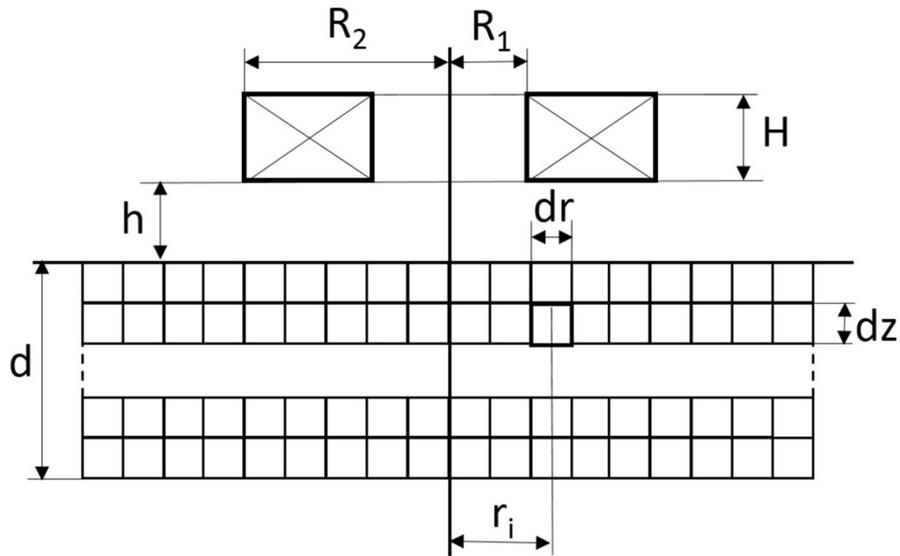


Рис. 1: Схематическое изображение системы “образец–измерительная катушка”.

Введём следующие обозначения: L_0 – индуктивность измерительной катушки, L_i – полная индуктивность i -го контура (сумма магнитной L_i^{mag} и кинетической L_i^{kin} индуктивностей), M_i – взаимная индуктивность i -го контура и измерительной катушки, M_{ij} – взаимная индуктивность i -го и j -го контуров (при $i = j$ совпадает с L_i^{mag}), $I_i(t)$ – индуцированный ток i -го контура. Выражение для кинетической компоненты индуктивности i -го контура [3] имеет вид

$$L_i^{\text{kin}} = \frac{\mu_0 \lambda^2 \cdot 2\pi r_i}{dr \cdot dz}. \quad (1)$$

Аналогично 1D модели [1] токи контуров описываются системой из N дифференциальных уравнений

$$\frac{dI_k(t)}{dt} = -\frac{1}{L_k} \left\{ V_k(I_k(t)) + M_k \frac{dI_0(t)}{dt} + \sum_{i=1, i \neq k}^N M_{ik} \frac{dI_i(t)}{dt} \right\}, \quad (2)$$

где $I_0(t)$ – ток возбуждения через измерительную катушку, а $V_k(I_k)$ – вольт-амперная характеристика (ВАХ) k -го контура, т. е. падение напряжения на полной длине $2\pi r_k$ данного контура (на активной части его полного сопротивления) при протекании через него тока I_k . При этом напряжение отклика образца, регистрируемое на выводах измерительной катушки, может быть записано в виде

$$U_{\text{resp}}(t) = \sum_{i=1}^N M_i \frac{dI_i(t)}{dt}. \quad (3)$$

Таким образом, для нахождения распределения токов в образце необходимо численное решение системы из N дифференциальных уравнений (2). Следует отметить, что все геометрические параметры задачи входят в модельные уравнения исключительно через величины собственных и взаимных индуктивностей, поэтому к точности их вычисления предъявляются высокие требования. В частности, не применимы широко используемые на практике приближённые формулы расчёта индуктивностей. Также, в отличие от 1D модели, принципиально важным является учёт кинетической индуктивности контуров (1), всецело определяющей проникновение индукционных токов в толщину плёнки.

Параметры модели. Для возможности сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными и результатами 1D модели, определим все параметры задачи согласно [1]. Представим измерительную катушку в виде одиночного витка прямоугольного сечения высотой 0.4 мм, внешним диаметром 1.6 мм и внутренним диаметром 0.4 мм, расположенного над поверхностью образца с зазором 0.14 мм. Результаты расчётов взаимных индуктивностей данного витка и модельных контуров (вектор M_i) домножим на число витков реальной катушки (600 витков провода диаметром 20 мкм). Образец промышленной ВТСП ленты 2-го поколения представим в виде диска диаметром 10 мм и толщиной 1 мкм, а лондоновскую глубину проникновения магнитного поля примем равной 500 нм. Разобьём данный диск на 200 витков в радиальном направлении и на 40 слоёв по толщине (данное разбиение по толщине является заведомо избыточным для описываемой системы, но позволяет улучшить визуальное представление результатов на рис. 2). Вольт-амперную характеристику сверхпроводника зададим

в виде степенной функции $E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n$, где E – величина падения напряжения на единицу длины, E_c – её пороговое значение (1 мкВ/см), J – плотность тока образца, J_c – критическая плотность тока (2.67 МА/см²), n – показатель крутизны нарастания ВАХ (20). Ток через измерительную катушку запишем в виде $I_0(t) = I_0 \sin \omega t$, где I_0 – амплитуда тока возбуждения, $\omega = 6000$ рад/с – циклическая частота. Все расчёты собственных и взаимных индуктивностей контуров выполнены по формулам из работы [4].

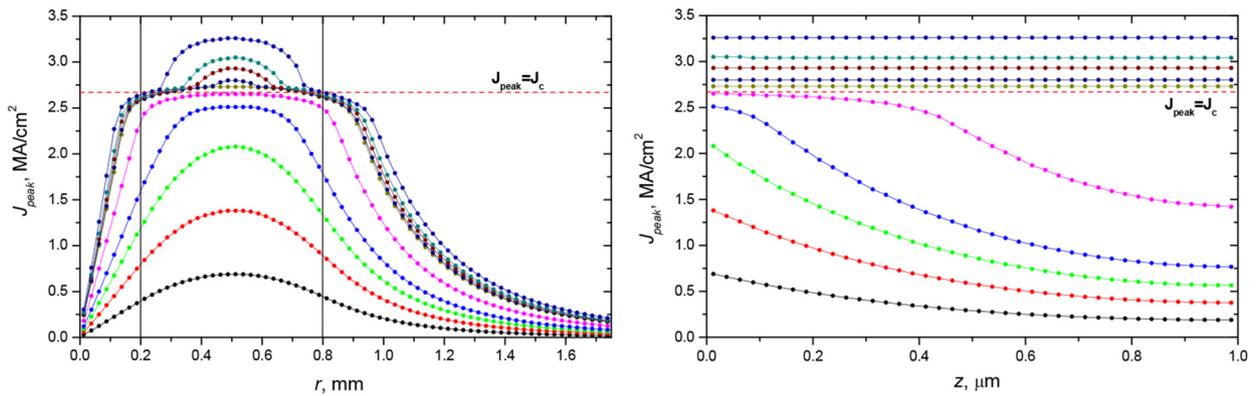


Рис. 2: Расчётные радиальное (для слоя с $z = 0$, левая плоскость) и по толщине (для столбца с $r = R_{\text{mid}}$, правая плоскость) распределения пиковых значений плотности тока контуров. Амплитуды тока возбуждения (кривые снизу-вверх): 10, 20, 30, 40, 60, 80, 82, 86, 90, 100 мА, соответственно. Вертикальными линиями для наглядности отмечены внутренний и внешний радиусы измерительной катушки.

Распределение токов. Для удобства дальнейшего рассмотрения введём следующие обозначения: R_{mid} – средний радиус измерительной катушки (полусумма R_1 и R_2), J_{peak} или $J_{\text{peak}}(r, z)$ – пиковое значение плотности тока какого-либо контура (для простоты считаем координаты r и z непрерывными). На рис. 2 представлены расчётные распределения пиковых значений плотности индуцированного тока контуров по радиусу $J_{\text{peak}}(r, 0)$ и толщине образца $J_{\text{peak}}(R_{\text{mid}}, z)$, соответственно, для различных амплитуд тока возбуждения I_0 . На рис. 3 показана зависимость $J_{\text{peak}}(R_{\text{mid}}, 0)$ от I_0 , на которой можно выделить три характерных участка, отвечающих различным режимам распределения индукционных токов.

Первый режим (участок I на рис. 3), реализующийся при малых I_0 (до ~ 40 мА в рассматриваемом случае), характеризуется радиальным распределением J_{peak} контуров любого слоя в виде колокола с высотой, пропорциональной I_0 , и положением максимума $r_{\text{max}} = R_{\text{mid}}$. По толщине плёнки J_{peak} убывает по закону, близкому к экспоненциально-

му, причем отклонение от экспоненциальной формы вызвано краевыми эффектами на нижней границе образца и наиболее заметно для относительно тонких плёнок (как в нашем случае с $d = 2\lambda$). При неизменном значении J_c протяжённость данного участка возрастает с увеличением λ (вплоть до перехода модели в 1D) и не зависит от толщины плёнки при $d > \sim 2\lambda$.

Второй режим (участок II) реализуется при дальнейшем росте I_0 , когда высота колокола $J_{\text{peak}}(r, 0)$ приближается к модельной критической плотности тока J_c . При этом увеличение высоты колокола замедляется, а его вершина выполаживается. Вблизи поверхности плёнки начинает формироваться околоскритическая область, захватывающая некоторую часть модельных контуров, в пределах которой J_{peak} практически неизменно. Размер этой области как в радиальном направлении, так и по толщине образца увеличивается с ростом I_0 . Отметим, что протяжённость участка II возрастает с увеличением отношения d/λ .

Наконец, при некотором $I_0 \sim 80$ мА нижний край околоскритической области достигает границы плёнки, и начинает реализовываться режим, который можно условно обозначить как “пробой” образца (участок III), при этом величина J_{peak} по всей толщине образца в некоторой области становится постоянной. Вначале эта область пробоя представляет собой узкий столбец в окрестности $r = R_{\text{mid}}$, а при дальнейшем увеличении I_0 расширяется в радиальном направлении. Одновременно с этим начинается и дальнейший рост J_{peak} в данной области, которая становится сверхкритической. Отметим, что за пределами данной относительно узкой области пробоя плотности токов по-прежнему не превышают околоскритический уровень.

Нелинейный отклик. Очевидно, что первопричиной возникновения нелинейного отклика является нелинейность, заложенной в модель ВАХ образца. Типичная ВАХ технического сверхпроводника (обычно моделируемая степенной функцией с показателем $\sim 20 - 30$) вначале плавно возрастает по мере приближения тока к критическому значению, а вскоре после его превышения рост становится очень резким. Соответственно, если амплитуда изначально синусоидального тока какого-либо контура приближается к критическому значению, то начинается вначале “мягкое” (что имеет место быть на участке II в околоскритической области), а затем, по мере роста амплитуды, и “жёсткое” (на участке III в области пробоя) симметричное по полярности токоограничение, приводящее к возникновению нечётных гармоник исходной частоты тока возбуждения. Более того, очевидно, что вклад именно области пробоя преобладает в суммарном нелинейном отклике образца. Это позволяет предположить, что на участке III поведение отклика

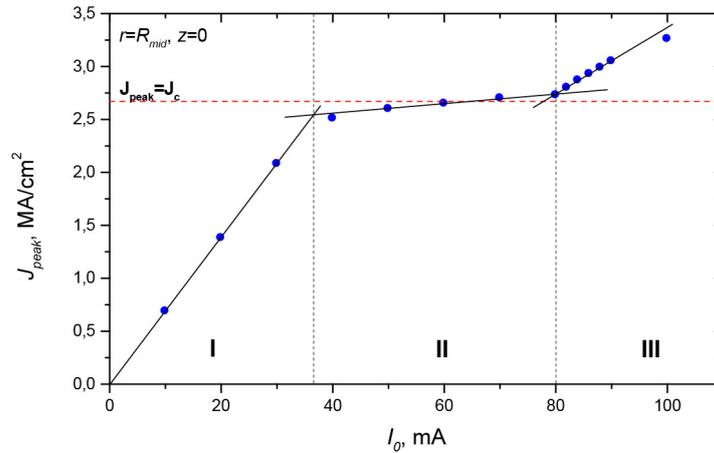


Рис. 3: Расчётная зависимость пикового значения плотности тока контура с координатами $(R_{\text{mid}}, 0)$ от тока возбуждения. Вертикальными линиями обозначены приближенные границы участков, отвечающих различным режимам распределения индукционных токов.

должно быть похоже на результаты 1D модели, в то время как “одномерного” аналога участка II просто нет.

Для проверки данных предположений рассмотрим результаты расчёта нелинейного отклика образца в рамках 2D модели, а также сравним их с аналогичными результатами 1D модели и экспериментальными данными из работы [1]. На рис. 4 представлены зависимости нечётных гармоник сигнала отклика от амплитуды тока возбуждения. Отметим, что экспериментальная зависимость для 3-й гармоники была скорректирована для компенсации эффекта собственной кубической нелинейности измерительной катушки [5].

Отчётливо видно, что нелинейный отклик (преимущественно на частоте 3-й гармоники) возникает уже при токе возбуждения $I_0 \sim 40$ мА, что существенно ниже предсказываемого 1D моделью значения ~ 65 мА, и примерно соответствует началу II участка. Источником данного сигнала является околоскритическая область, постепенно увеличивающаяся с ростом I_0 . Наконец, при $I_0 \sim 80$ мА (начало участка III) происходит пробой образца, что сопровождается началом резкого роста амплитуд гармоник. Дальнейший ход кривых практически полностью совпадает с предсказаниями 1D модели. Таким образом, зависимости, полученные в рамках 2D модели, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными (без использования дополнительных подгоночных параметров) и в области больших I_0 совпадают с результатами 1D модели.

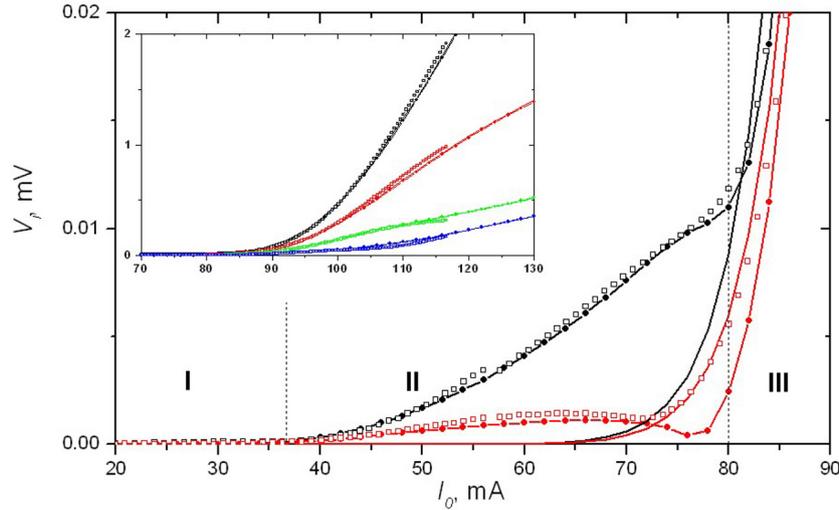


Рис. 4: Расчётные по 2D (линии с символами) и 1D (гладкие линии) моделям, а также экспериментальные (полые символы) зависимости амплитуд нечётных гармоник сигнала отклика V_i от амплитуды тока возбуждения I_0 . На основном рисунке для наглядности показаны графики только для 3-й (чёрные) и 5-й (красные) гармоник в области малых и средних I_0 , на вставке – обзорные зависимости для гармоник с 3-й по 9-ю (сверху-вниз в порядке убывания амплитуд) в области больших I_0 . Погрешности экспериментальных данных укладываются в размер символа. Вертикальными линиями обозначены приблизительные границы участков, отвечающих различным режимам распределения индукционных токов.

Заключение. В настоящей работе показана возможность применения простой многовитковой модели для получения двумерного распределения плотности индукционных токов в сравнительно толстой сверхпроводящей плёнке. В рамках предложенной модели получены пространственные распределения пиковых значений плотности тока в образце, а также рассмотрен спектральный состав сигнала отклика в зависимости от амплитуды тока возбуждения. Проведено сравнение результатов с экспериментом и результатами, полученными в рамках 1D модели. Установлено, что 2D модель позволяет описать нелинейный отклик околоскритической области (участок II), экспериментально наблюдаемый для относительно толстых плёнок. С другой стороны, для моделирования поведения системы в области пробоя (участок III – для больших токов возбуждения) возможно использование вычислительно более лёгкой 1D модели.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] С. Ю. Гаврилкин, А. Ю. Цветков, Краткие сообщения по физике ФИАН **51**(2), 56 (2024). DOI: 10.3103/S1068335623600997.
- [2] A. Markelov, A. Valikov, V. Chepikov, et al., Progress in Superconductivity and Cryogenics **21**(4), 29 (2019). DOI: 10.9714/psac.2019.21.4.029.
- [3] В. В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников* (М., МЦНМО, 2000).
- [4] А. А. Иванов, Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Физика **9**(1), 10 (2014).
- [5] А. Ю. Цветков, Краткие сообщения по физике ФИАН **49**(4), 39 (2022). DOI: 10.3103/S1068335622040066.

Поступила в редакцию 7 апреля 2025 г.

После доработки 10 мая 2025 г.

Принята к публикации 13 мая 2025 г.