

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

УДК 530.145.811

ТРЕЙС-ФОРМУЛА ГУТЦВИЛЛЕРА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ТУННЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. А. Радкевич

В рамках формализма интеграла по траекториям квантово-механическое туннелирование описывается инстантонами – решениями уравнений движения системы во мнимом времени. Однако во мнимом времени этот формализм пригоден лишь для исследования характеристик системы в состоянии термодинамического равновесия и не применим для существенно неравновесных явлений. В связи с этим, необходимо разработать подход, учитывающий инстантонные решения в рамках интеграла по траекториям в действительном времени. В настоящей статье сделан шаг в этом направлении, состоящий в обобщении трейс-формулы Гутцвиллера, выведенной в формализме в действительном времени, для плотности состояний квантово-механической системы в потенциале туннельного типа. Показано, что для получения действительных значений расщепления уровней в симметричном двухбядмном потенциале необходимо учитывать приближённые решения уравнений движения во мнимом времени, соответствующие многоинстанционным конфигурациям.

Ключевые слова: туннелирование, квазиклассика, интеграл по траекториям, инстантон, плотность состояний.

Введение. Туннелирование – квантовый феномен, суть которого состоит в том, что волновая функция системы в ходе своей динамики проникает в область конфигурационного пространства, отделённую потенциальным барьером, даже не имея на это до-

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: radkevichaa@lebedev.ru.

статочно энергии. Это явление по своей сути квазиклассическое и может быть описано в рамках квазиклассического приближения в квантовой механике путём решения уравнения Шрёдингера квазиклассическим методом. В то же время существует широкий класс систем, для которых представляет интерес описание туннелирования в рамках фейнмановского интеграла по траекториям, в частности, диссипативные системы, где описание системы с помощью волновой функции вовсе невозможно.

Описание туннелирования в квантово-механических системах методом интеграла по траекториям – направление, бурно развивавшееся в 1970-х годах прошлого века и привнесшее значительные результаты как в квантовой механике, так и в теории поля [1]. Перечисленные выше результаты были получены в рамках интеграла по траекториям во мнимом времени, который пригоден для нахождения корреляционных функций в условиях термодинамического равновесия, которые можно получить посредством аналитического продолжения от мацубаровских частот к действительным [2].

Несмотря на десятилетия внимания теоретиков, построение квазиклассического подхода в действительном времени к описанию динамики систем с туннелированием сейчас остаётся крайне актуальной задачей, отчасти как следствие возникновения подхода Пикара–Лефшеца [3], основной идеей которого является комплексификация многообразия интегрирования и её последующая деформация. Для систем в термодинамическом равновесии инстантонная техника была сформулирована в рамках техники Келдыша в недавней работе [4], где были получены корреляционные функции в реальном времени для решений инстантонного типа.

Ещё одной важной мотивацией для таких исследований служит квантовая физика мезоскопических систем, а именно динамические неравновесные явления в них. Особенный интерес в этом контексте представляют системы типа кубитов, в частности, осцилляторы с диссипацией и параметрической накачкой. Так, в работе [5] в рамках интеграла по траекториям для уравнения Линдблада в действительном времени был найден лидирующий вклад для энергии низших уровней в диссипативной системе под действием накачки с экспоненциальной точностью. В [6] с помощью анализа топологии комплексифицированных траекторий оказалось возможно вычислить скорость перехода между минимумами эффективного динамического потенциала в приближении врачающейся волны.

Перечисленные результаты позволяют судить лишь о самых низкоэнергетических состояниях в системе, а их расщепление было получено с экспоненциальной точностью. В то же время известно, что для систем с туннелированием возможно исследовать

и возбуждённые состояния, причём для их спектра возможно получить асимптотическое разложение, первый член которого содержит предэкспоненту и уже даёт большую точность [7–9]. Поэтому ясно, что систематический учёт решений инстанционного типа должен позволить исследовать возбуждённые состояния, в частности, предсказывать правильное расщепление в симметричном двухъямном потенциале.

В настоящей статье предлагается обобщение трейс-формулы Гутцвиллера [10], дающей спектр квантовой системы, на потенциалы с туннелированием, проведённое в рамках формализма действительного времени. Проводится анализ случаев двухъямного потенциала и потенциала с квазистационарными состояниями.

Формула Гутцвиллера без туннелирования. Рассмотрим одномерную квантовомеханическую систему с аналитическим стационарным потенциалом $V(x)$, имеющим один абсолютный минимум и неограниченно монотонно возрастающим при удалении от него. Спектр такой системы состоит из дискретного набора невырожденных уровней с энергией E_n , соответствующих собственным состояниям $|n\rangle$. В рамках интеграла по траекториям плотность состояний в таком потенциале можно получить, введя величину

$$\begin{aligned} Z(E) &= \int_0^\infty dt e^{i(E+i0)t} \int dx \langle x | \hat{U}_t | x \rangle \int_0^\infty dt e^{i(E+i0)t} \sum_{n=0}^\infty \langle x | n \rangle \langle n | x \rangle e^{-iE_n t} = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{i}{E + i0 - E_n}, \end{aligned} \quad (1)$$

действительная часть которой соответствует плотности состояний $\rho(E)$:

$$\operatorname{Re} Z(E) = \sum_{n=0}^\infty \pi \delta(E - E_n) = \pi \rho(E). \quad (2)$$

В формулах выше \hat{U}_t – оператор эволюции системы за время t , значение постоянной Планка принято равным $\hbar = 1$. Для матричного элемента оператора эволюции из начальной координаты x_i в конечную x_f верно представление в виде интеграла по траекториям

$$\langle x_f | \hat{U}_t | x_i \rangle = \int_{x(0)=x_i}^{x(t)=x_f} Dx(\tau) e^{i \int_0^t d\tau (m\dot{x}^2/2 - V(x))}, \quad (3)$$

в котором учитываются траектории с указанными граничными условиями. При взятии функционального интеграла по $s(\tau)$ методом перевала в формуле (3) результат выраживается на решения уравнений движения $x_{cl}(\tau)$ с соответствующими граничными

условиями, каждое из которых вносит вклад

$$\langle x_f | \hat{U}_t | x_i \rangle = \sqrt{\frac{i}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_f}} S_{cl}(x_i, x_f, t) e^{iS_{cl}(x_i, x_f, t)}, \quad (4)$$

где

$$S_{cl}(x_i, x_f, t) = S[x_{cl}(\tau)]. \quad (5)$$

Следующий шаг – взятие интегралов по x и t в (1). Используя свойства действия (5), а именно

$$\frac{\partial S_{cl}(x_i, x_f, t)}{\partial x_i} = -p_i, \quad \frac{\partial S_{cl}(x_i, x_f, t)}{\partial x_f} = p_f, \quad \frac{\partial S_{cl}(x_i, x_f, t)}{\partial t} = -E_{cl}, \quad (6)$$

где p_i и p_f – начальные и конечные значения импульса траектории, а E_{cl} – энергия на ней, получим, что перевальная точка по x оставляет только периодические траектории, на которых значения импульса в начальный и конечный момент времени совпадают. При взятии интеграла по t перевальными оказываются периодические траектории, классическая энергия которых равна E . В одном измерении периодическая траектория имеет либо две точки поворота и является примитивной с периодом $t(E)$, либо может быть представлена как n -кратное прохождение такой примитивной траектории. Выполняя дальнейшее интегрирование по t в окрестности седловой точки $nt(E)$, получим

$$Z(E) = \int dx \sqrt{\frac{m^2}{\dot{p}_i \dot{p}_f}} e^{i\mathcal{A}(E)} = -t(E) e^{i\mathcal{A}(E)}, \quad (7)$$

где

$$\mathcal{A}(E) = nEt(E) + S_{cl}(x, x, t) = \oint p_E(x) dx \quad (8)$$

с

$$p_E(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}. \quad (9)$$

Предэкспоненциальный множитель в (7) в ходе движения по траектории приобретает дополнительный множитель $(-i)$ при изменении знака скорости частицы, таким образом, на интересующих нас периодических траекториях он равен $(-1)^n/\dot{x}_i$, где \dot{x}_i – начальная скорость, равная p_i/m . Суммируя по многократным прохождениям одной примитивной траектории и выполняя интегрирование по x , дающее примитивный период $t(E)$, получим вклад

$$Z(E) = t(E) \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{i\mathcal{A}(E)})^n = -t(E) \frac{e^{i\mathcal{A}(E)}}{1 + e^{i\mathcal{A}(E)}}. \quad (10)$$

Используя тот факт, что $t(E) = \partial \mathcal{A}(E) / \partial E$, выражение выше можно привести к виду

$$Z(E) = i\partial_E \ln (1 + e^{i\mathcal{A}(E)}). \quad (11)$$

Видно, что полученное выражение имеет полюса в точках $\oint p_E(x)dx = 2\pi(n + \frac{1}{2})$, соответствующих правилу квантования Бора–Зоммерфельда. Вычисляя действительную часть (11), получим

$$\operatorname{Re} Z(E) = -\frac{t(E)}{2} + \pi \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n). \quad (12)$$

Первый член в формуле выше в точности сокращается с “классическим” вкладом от эволюции на малых временах

$$\delta \operatorname{Re} Z(E)_{t \rightarrow 0} = \operatorname{Re} \int \frac{dxdp}{2\pi} \frac{i}{E + i0 - H(p, x)} = \frac{t(E)}{2}. \quad (13)$$

В итоге формула (11) в сумме с (13) в точности воспроизводит квазиклассический спектр однояймного потенциала.

Периодические траектории в туннельном случае. Теперь рассмотрим аналитический потенциал, имеющий несколько “долин” и “холмов”, и будем интересоваться энергиями E ниже высоты барьера, разделяющего его минимумы. В этом случае помимо классических примитивных периодических траекторий, колеблющихся в каждом из минимумов, есть ещё траектории инстантонного типа, на которой импульс принимает чисто мнимое значение. Поскольку при интегрировании по траекториям поверхность интегрирования можно деформировать в комплексную плоскость, траектории инстантонного типа также дают свой вклад.

Найдём теперь все возможные периодические траектории на заданной энергии E , при которой возможно туннелирование, а значения импульса и координаты на которых могут уходить с действительной оси в комплексную плоскость. Для этого необходимо более детально исследовать свойства функции $p_E(x)$, задаваемой ур-ем (9) в комплексной плоскости (x может принимать комплексные значения). Функция $p_E(x)$ имеет точки ветвления, определяемые условием $V(x) = E$, а сама она определена на двулистной римановой поверхности \mathcal{M} . При этом движение частицы со временем описывается формулой $p_E(x)dt = mdx$, в которой dx и dt принимают теперь уже комплексные значения. Замкнутые траектории – это замкнутые контура на римановой поверхности \mathcal{M} функции $p_E(x)$, период которых задаётся интегралом

$$T = \oint \frac{m dx}{p_E(x)} \quad (14)$$

вдоль этого контура, в то время как укороченное действие равно

$$\mathcal{A} = \oint p_E(x) dx. \quad (15)$$

В силу аналитичности функции $p_E(x)$ на римановой поверхности \mathcal{M} , непрерывная деформация замкнутой траектории не меняет ни её период (14), ни её укороченное действие (15), следовательно, все возможные замкнутые траектории системы можно деформировать таким образом, что они будут проходить вдоль разрезов по действительной оси между соседними точками поворота. Таким образом, все замкнутые траектории разбиваются на классы эквивалентности в соответствии с тем, в какой последовательности они “наматываются” на разрезы, а их периоды и действия совпадают. Каждая из возможных периодических траекторий может служить перевальной точкой интеграла по траекториям для $Z(E)$, однако их огромное количество связано с тем, что координата частицы была комплексифицирована. В то же время интегрирование по координате в каждый момент времени проводится вдоль контура, который может быть деформирован до действительной прямой, а не по всей комплексной плоскости, и среди всех возможных траекторий вклад дадут лишь те из них, которые будут лежать на поверхности интегрирования. Поскольку периодические траектории каждого класса сводятся непрерывной деформацией к траекториям с действительными x , но, в общем случае, комплексными t , далее можно действовать по аналогии с выводом, приведённым в прошлой секции.

Проведём более подробную классификацию периодических траекторий в потенциале с различными минимумами и максимумами. Есть два типа разрезов, вокруг которых вращаются траектории:

- Разрез, соответствующий колебаниям в i -м минимуме с действием $\mathcal{A}_i(E)$ на примитивной траектории с периодом $T_i(E) = \partial \mathcal{A}_i(E) / \partial E$;
- Разрез, соответствующий колебаниям внутри j -го барьера во мнимом времени с действием $2i\mathcal{B}_j(E)$ на примитивной траектории с периодом $-2i\beta_j(E) = 2i\partial \mathcal{B}_j(E) / \partial E$ (множитель 2 здесь введён для того, чтобы \mathcal{B} совпадало с действием инстантона в пределе $\beta \rightarrow \infty$).

Все возможные периодические траектории сводятся к последовательным обращениям вокруг этих разрезов в допустимом порядке. Для нахождения всех релевантных вкладов в $Z(E)$ необходимо просуммировать вклады отдельных траекторий в соответствии с (7), включая подбарьерные. При этом изначальный контур интегрирования по времени вместе с требованиями сходимости суммы диктует, что выбирать надо те из них,

на которых время имеет положительную действительную часть, а действие – положительную мнимую часть (что определяет отрицательную мнимую часть времени).

Двухъямный потенциал. Просуммируем теперь вклады от всевозможных периодических траекторий для двухъямного потенциала (см. рис. 1). В этом случае у системы есть три разреза: $(-w, -y)$ соответствует колебаниям вокруг левого минимума с укороченным действием \mathcal{A}_1 , $(-y, y)$ – подбарьерному движению во мнимом времени с мнимым укороченным действием $2\mathcal{B}$, (y, w) – колебаниям вокруг правого минимума с \mathcal{A}_2 .

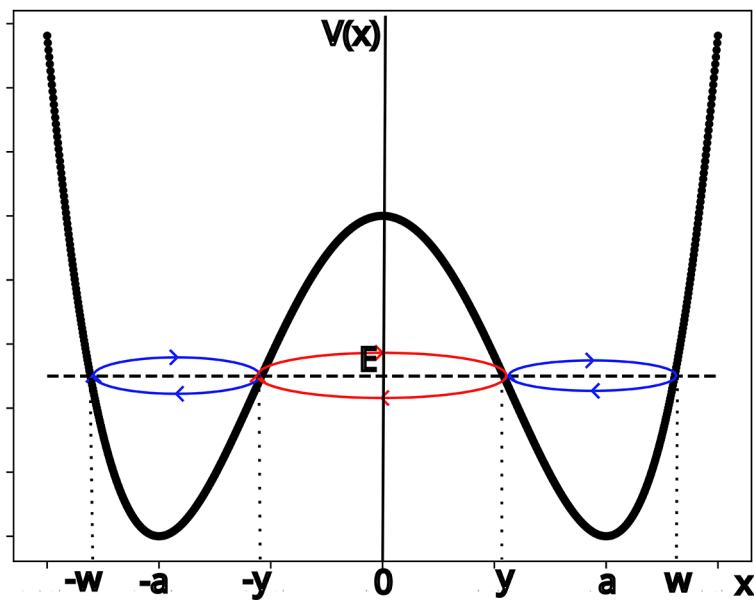


Рис. 1: Периодические траектории в двухъямном потенциале: колебания вокруг левого и правого минимумов с действиями $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ и траектория туннельного типа с действием $2i\mathcal{B}$.

Наивное суммирование, аналогичное (10), даёт

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_{1 \rightarrow 1} + Z_{2 \rightarrow 2} + Z_{1 \leftrightarrow 2} = \\
 &= i\partial_E \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} (-e^{i\mathcal{A}_1})^N + i\partial_E \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} (-e^{i\mathcal{A}_2})^N + \\
 &\quad + i\partial_E \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-e^{i\mathcal{A}_1})^m (-e^{i\mathcal{A}_1})^k (-e^{-\mathcal{B}}) \right]^N = \\
 &= i\partial_E \ln(1 + e^{i\mathcal{A}_1}) + i\partial_E \ln(1 + e^{i\mathcal{A}_2}) + i\partial_E \ln \left(1 + \frac{e^{-\mathcal{B}}}{(1 + e^{i\mathcal{A}_1})(1 + e^{i\mathcal{A}_2})} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= i\partial_E \ln \left((1 + e^{i\mathcal{A}_1}) (1 + e^{i\mathcal{A}_2}) + e^{-\mathcal{B}} \right), \quad (16)$$

где $Z_{1 \rightarrow 1}, Z_{2 \rightarrow 2}$ – вклады от траекторий, колеблющихся в каждом из минимумов, а $Z_{1 \leftrightarrow 2}$ – вклад, включающий перескоки из одного минимума в другой и обратно за мнимое время. Множитель $1/N$ в сумме (16) возникает потому, что при многократном прохождении траектории интеграл по начальному условию (см. (7)) даёт примитивный период траектории. Аналогичный результат в рамках формализма точного WKB-анализа был получен в работе [11]. Исследуем положения полюсов полученного выражения, считая, что двухъя姆ный потенциал симметричен, что соответствует $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$. В этом случае, приравнивая к нулю аргумент логарифма из (16), получим

$$e^{i\mathcal{A}(E)} = -1 \pm ie^{-\mathcal{B}(E)}. \quad (17)$$

Как результат, уровни, получаемые стандартным независимым квантованием в каждой из ям по правилу Бора–Зоммерфельда, расщепляются на $\delta E \approx \pm \frac{1}{T(E)} e^{-\mathcal{B}(E)/2}$, однако также появляется дополнительная мнимая добавка к энергии $\Gamma \approx -\frac{1}{T(E)} e^{-2\mathcal{B}(E)}$. Сравнение с ответом, полученным в инстанционной технике во мнимом времени [12, 1] показывает, что выведенный нами ответ позволяет найти расщепление уровней лишь с экспоненциальной точностью, в то время как префактор оказывается неверным. Более того, появление во втором порядке по $e^{-\mathcal{B}(E)/2}$ мнимой части у энергии состояния не отвечает физике системы. Обе эти проблемы связаны с тем, что, помимо точных решений уравнений движения, есть класс приближённых уравнений движения – многоинстанционные конфигурации, вклад которых в функциональный интеграл имеет такой же порядок малости по $e^{-\mathcal{B}(E)/2}$ [1]. При достаточно низких энергиях обе указанные проблемы находят решение в рамках инстанционной техники [7, 8]. Учёт многоинстанционных конфигураций показывает, что получаемые вычислением в одном порядке мнимые части энергий собственных состояний сокращаются с поправками, возникающими в следующем порядке после суммирования по Борелю [9]. Подобное суммирование можно провести в пределе низких энергий, когда движение частицы под барьером во мнимом времени таково, что она большую часть времени проводит в окрестности его минимумов.

Суммирование многоинстанционных вкладов. Проведём такое суммирование в приближении невзаимодействующего инстанционного газа, дающем лидирующий вклад для наименее высоких энергий. Рассмотрим движение частицы в симметричном двухъямном потенциале с точками минимума в $x = \mp a$. Если энергия частицы близка к $V(\pm a)$, что соответствует низколежащим уровням системы, то период подбарьерного движения $\beta(E) \rightarrow \infty$, при этом частица находится вдали от $x = \pm a$ лишь конечное время $\delta\tau$

(время перескока). В этой ситуации можно сконструировать траектории, которые будут решениями уравнения движения лишь приближённо, при этом внося сопоставимый с точным решением вклад. Обозначим подбарьерную часть траектории между соответствующими точками поворота $\pm y$ как $x_0(\tau) \rightarrow \mp y$, $\tau \rightarrow \mp \beta(E)/2$. Многоинстанционные конфигурации можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= q_1 x_0(\tau - 1), \quad \tau \in \left(0, (\tau_1 + \tau_2)/2\right), \quad i = 1, \\ x(\tau) &= q_i x_0(\tau - \tau_i), \quad \tau \in \left(\tau_{i-1} + \tau_i)/2, (\tau_i + \tau_{i+1})/2\right), \quad i = 2, \dots, N-1, \\ x(\tau) &= q_N x_0(\tau - N), \quad \tau \in \left((\tau_{N-1} + \tau_N)/2, \beta(E)\right), \quad i = N, \end{aligned} \quad (18)$$

где $q_i = \pm 1$ определяют направление движения частицы и обязаны чередовать знаки, а $0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < \beta(E)$, $\delta\tau \ll \tau_{i+1} - \tau_i < \beta(E) - \delta\tau$. Действие на такой траектории с экспоненциальной точностью равно NS_0 вне зависимости от положения центров инстантонов (антиинстантонов) τ_i , что говорит о том, что их смещения – нулевые моды, интегрирование по которым нельзя проводить в гауссовом приближении. При этом в туннелирование из одного минимума в другой дают вклады только конфигурации с нечётными N , в то время как инстанционная поправка перехода в тот же самый минимум даётся суммой по чётным N . Вычислим эти вклады (см. рис. 2)

$$\begin{aligned} \delta Z(E)_{1 \rightarrow 1}^{\text{inst}} &= i\partial_E \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\beta} K d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\beta} K d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{2n-1}}^{\beta} K d\tau_{2n} (-i)^{2n} e^{-n\mathcal{B}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{im\mathcal{A}} \right)^M = \\ &= i\partial_E \ln \left(1 - \frac{e^{i\mathcal{A}}}{1 + e^{i\mathcal{A}}} \left(1 - \cos(\beta K e^{-\mathcal{B}}) \right) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

отвечает за туннельные поправки к движению в окрестностях одного минимума, где K – якобиан, возникающий при переходе к интегрированию по τ_i . Складывая со стандартным вкладом (11), получим

$$Z_{1 \rightarrow 1}(E) = i\partial_E \ln \left(1 + e^{i\mathcal{A}} \cos(\beta K e^{-\mathcal{B}}) \right). \quad (20)$$

Вклад, учитывающий перескоки между разными минимумами, даётся несколько более сложной формулой

$$Z(E)_{1 \leftrightarrow 2} = i\partial_E \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M} \left\{ \left(\sum_{p=1}^{\infty} \int_0^{\beta} K d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\beta} K d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{2p}}^{\beta} K d\tau_{2p+1} (-i)^{2p+1} e^{-(p+1/2)\mathcal{B}} \right) \times \right.$$

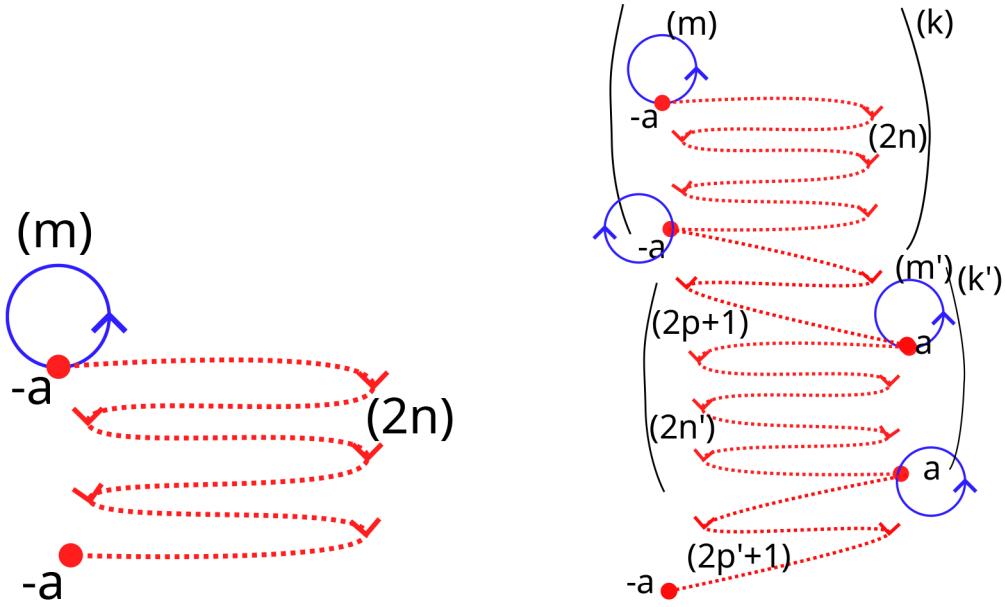


Рис. 2: Диаграммы, соответствующие инстантонным вкладам в $Z(E)$. Слева – траектории, многократное прохождение которых даёт $\delta Z(E)_{1 \rightarrow 1}^{inst}$, справа – те, которые определяют $\delta Z(E)_{1 \rightarrow 2}$. Синие линии соответствуют классическим вкладам $-e^{i\mathcal{A}_{1,2}}$ с указанной кратностью, красные – инстантонным вкладам $-ie^{-\mathcal{B}}$ с указанной кратностью.

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{s=1}^{\infty} (-e^{i\mathcal{A}})^s \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-e^{i\mathcal{A}})^m \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\beta} K d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\beta} K d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{2n}}^{\beta} K d\tau_{2n} (-i)^{2n} e^{-n\mathcal{B}} \right)^k \right)^{2M} = \\
 & = i\partial_E \ln \left(1 + \sin^2(\beta K e^{-\mathcal{B}}) \left(\frac{e^{i\mathcal{A}}}{1 + e^{i\mathcal{A}}} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{e^{i\mathcal{A}}}{1 + e^{i\mathcal{A}}} (1 - \cos(\beta K e^{-\mathcal{B}}))} \right)^2 \right) = \\
 & = i\partial_E \ln \left(1 + \sin^2(\beta K e^{-\mathcal{B}}) \left[\frac{e^{i\mathcal{A}}}{1 + e^{i\mathcal{A}} \cos(\beta K e^{-\mathcal{B}})} \right]^2 \right). \tag{21}
 \end{aligned}$$

Суммируя все полученные вклады, имеем

$$Z(E) = Z_{1 \rightarrow 1}(E) + Z_{2 \rightarrow 2}(E) + Z(E)_{1 \leftrightarrow 2} = i\partial_E \ln (1 + 2e^{i\mathcal{A}} \cos(\beta K e^{-\mathcal{B}}) + e^{2i\mathcal{A}}). \tag{22}$$

Это выражение имеет полюса в точках, соответствующих

$$\mathcal{A}(E) = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \beta K e^{-\mathcal{B}}, \tag{23}$$

что даёт спектр расщепление $\Delta_n \approx 2 \frac{K\beta(E_n)}{T(E_n)} e^{-\mathcal{B}(E_n)}$. Значение константы K можно восстановить, зная ответ для расщепления, полученный в инстантонной технике во мнимом времени [1, 12] (что эквивалентно аналитическому продолжению статсуммы с больших β на действительное время), что приводит к ответу $\Delta_n = 2K'e^{-\mathcal{B}(E_n)}$, где префактор K' уже не зависит от E на низких энергиях. Полученное выражение имеет по сравнению с (16) то преимущество, что не приводит к возникновению нефизической мнимой поправки к уровням энергии в двухъя姆ном потенциале. А его недостатком является необходимость восстанавливать константу K исходя из уже известного результата. Тем не менее, такой подход приводит к физически правильному и квазиклассически точному ответу.

Полученный результат непосредственно обобщается на случай несимметричной ямы с одинаковыми значениями потенциала в минимумах, приводя к

$$Z(E) = i\partial_E \ln \left(1 + (e^{i\mathcal{A}_1(E)} + e^{i\mathcal{A}_2(E)}) \cos(\beta K e^{-\mathcal{B}(E)}) + e^{i\mathcal{A}_1(E)+i\mathcal{A}_2(E)} \right). \quad (24)$$

Легко проверить, что полюса этого выражения также находятся на действительной оси. Однако, если устремить ширину одной из ям (скажем, второй) к бесконечности, то заменой $e^{i\mathcal{A}_2} \rightarrow 0$ можно получить мнимую добавку к энергиям уровней первой ямы, то есть найти время жизни состояний. Стоит, однако, отметить, что проведённое вычисление не совсем верно для задачи о распаде метастабильного состояния в окрестности локально-го (но не глобального) минимума, поскольку тригонометрическое соотношение между вкладами от нечётного и четного количества инстантонных перескоков основывается на том, что инстантон проводит большое время у каждого из минимумов потенциала, что возможно лишь, если значения потенциала в минимумах совпадают, при этом оба эти минимума квадратичные.

Подводя итог, отметим, что при выводе формулы Гутцвиллера прямое суммирование по циклам в случае двухъямного потенциала приводит к возникновению нефизических мнимых добавок. Для их устранения необходимо учесть также приближённые решения уравнений движения, соответствующие т. н. многоинстантонным конфигурациям. Это явление, известное во мнимом времени как “Resurgence” [8, 9], позволяет сократить возникающие мнимые добавки. Для наименее высоких энергий учёт многоинстантонных конфигураций можно провести явно, что и было сделано в настоящей работе. В то же время, для промежуточных значений энергий (когда условие $\beta(E) \gg T(E)$ не выполняется) многоинстантонные конфигурации более не являются приближёнными решениями уравнений движения, и вопрос о том, каким образом необходимо модифицировать настоящий формализм для получения действительного спектра, остаётся открытым.

Настоящая работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” № 23-1-4-49-1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] S. Coleman, *The uses of instantons. The whys of subnuclear physics* (Boston, MA: Springer US, 1979).
- [2] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinskii, *Methods of quantum field theory in statistical physics* (Englewood Cliffs, 1963).
- [3] Y. Tanizaki, T. Koike, *Annals of Physics* **351**, 250 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.09.003>.
- [4] N. Kolganov, *Journal of High Energy Physics* **2023**(10), 1 (2023). [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2023\)103](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2023)103).
- [5] F. Thompson, A. Kamenev, *Physical Review Research* **4**(2), 023020 (2022). <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.023020>.
- [6] D. K. J. Boneβ, W. Belzig, M. I. Dykman, Zero-temperature phase-flip rate in a biased parametric oscillator. arXiv preprint arXiv:2501.07562. – 2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.07562>.
- [7] E. B. Bogomolny, *Physics Letters B* **91**(3-4), 431 (1980). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)91014-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)91014-X).
- [8] J. Zinn-Justin, *Nuclear Physics B* **192**(1), 125 (1981). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(81\)90197-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90197-8).
- [9] J. Zinn-Justin, *Nuclear Physics B* **218**(2), 333 (1983). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(83\)90369-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90369-3).
- [10] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*. Vol. 1 (Springer Science and Business Media, 2013).
- [11] N. Sueishi et al., *Journal of High Energy Physics* **2020**(12), 1 (2020). [https://doi.org/10.1007/JHEP12\(2020\)114](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2020)114).
- [12] H. Kleinert, *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets* (World Scientific Publishing Company, 2006).

Поступила в редакцию 24 апреля 2025 г.

После доработки 25 сентября 2025 г.

Принята к публикации 29 сентября 2025 г.