

УДК 535.551

ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПОРЯДКА В МЕХАНИЧЕСКИ НАПРЯЖЕННОМ ПОЛИУРЕТАНЕ

В. В. Кесаев, В. А. Барбашов

В работе исследована поляризованная фотолюминесценция и ориентационный порядок люминесцентных центров в механически нагруженном полиуретане, содержащем флуоресцентный краситель. В рамках дипольной модели получено разложение азимутальной зависимости зарегистрированной интенсивности люминесценции по поляризационному азимуту и показано, что наблюдаемая модуляция описывается суммой конечного числа фурье-гармоник. Это позволяет ввести минимальную экспериментальную схему “4 + 2”, достаточную для вычисления частичной поляризации ($DoLP$), а также извлечения скалярного параметра порядка (S) и поля направлений (директора). Для количественного сопоставления оптических карт с механическим полем напряжений предложена локальная связь типа Ландау, в которой параметр порядка определяется девиаторной частью тензора напряжений.

Ключевые слова: фотолюминесценция, поляризационно-оптический метод, напряженно-деформированное состояние.

Введение. Поляризационно-разрешённая фотолюминесценция (ПФЛ) в конденсированных средах давно сформировалась как самостоятельное направление, поскольку поляризационные характеристики эмиссии (анизотропия, степень поляризации и их временная эволюция) дают прямой доступ к ориентационной статистике и динамике люминесцентных центров и потому широко применяются для фотоселекции в химическом анализе, идентификации конформаций и симметрии молекул, а также для исследования анизотропных и реологических свойств материалов [1–4]. Методологически

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: vladimir.kesaev@gmail.com.

эта область опирается на аппарат поляризационной спектроскопии и строгую теорию фотоселекции, включая режимы произвольной интенсивности возбуждения и корректный учёт переориентационной динамики, связывающий наблюдаемую поляризацию с ориентационными корреляторами и параметрами порядка [5, 6]. В отличие от метода частично поляризованных изопах [7] ПФЛ не требует помещения образца в интерферометр и может применяться дистанционно. На практике ПФЛ доказала эффективность при восстановлении ориентационного порядка в ориентированных полимерных и жидкокристаллических системах и при контроле ориентации в полимерных изделиях и плёнках по поляризации эмиссии [8–11], а также в технологиях формирования линейно-поляризованного излучения через управляемый перенос энергии без потерь на поляризаторах [12]. В последние годы фокус смещается к задачам диагностики структуры и напряжённо-деформированного состояния: ПФЛ реализуется в виде люминесцентных фотоупругих покрытий для полнополевого измерения деформаций на поверхности деталей [13], применяется для наномасштабного контроля деформаций полимерных матриц по одиночным молекулам-зондам [14], а в полупроводниковых структурах используется для картирования деформаций и напряжений по степени линейной поляризации люминесценции (DoLP) [15–17]. Параллельно развиваются люминесцентные пьезоспектроскопические подходы, где механическое воздействие извлекается из спектральных сдвигов и расщеплений эмиссионных линий (классический пример – “рубиновая” шкала давления) и её инженерные обобщения для измерения остаточных напряжений [18, 19], а также механически управляемые режимы (включая круговую поляризацию люминесценции) в функциональных полимерных системах [20].

В большинстве работ поляризованная фотолюминесценция трактуется как скалярный индикатор деформации и рассматривается преимущественно в простых одноосных геометриях; задача о явном восстановлении полного тензора напряжений, как правило, не ставится. В настоящей работе рассматривается более информативная постановка: анализируется частично поляризованная люминесценция через коэффициенты её фурье-разложения по поляризационному азимуту и показывается, что угловая зависимость интенсивности при сканировании азимута описывается суммой четырёх гармоник, что позволяет перейти к минимальной схеме сбора данных “4+2” (четыре азимута для восстановления гармонических коэффициентов и два измерения для определения постоянной составляющей). В отличие от нашей недавней работы [21], где применялась эмпирическая схема измерений типа “кросс-матрицы” по фиксированным азимутам поляризатора и анализатора и демонстрировалось согласование восстановленных

направлений поляризации с картиной изоклин и деформаций в бразильском диске, в настоящей рукописи основной акцент сделан на оптимизированной архитектуре эксперимента: предложен минимальный набор из 4+2 комбинаций азимутов возбуждения и регистрации, достаточном для реконструкции поляризационного состояния ПФЛ и получения скалярного параметра порядка, а также для синтеза интенсивности ПФЛ при произвольных азимутах.

Исходной моделью ПФЛ в работе служит изолированный элементарный диполь с совпадающими поглощающей и излучающей осями, ориентированными в пространстве вдоль единичного вектора \mathbf{d} . В этом случае взаимодействием между диполями и концентрационным тушением можно пренебречь. На практике это условие реализуется при умеренных концентрациях хромофора в полимерной матрице и легко может удовлетворяться, например, в случае тонких люминесцентных покрытий, наносимых на поверхность нагруженных конструкций. В настоящей работе мы ограничиваемся плоским напряжённым состоянием тонкого полимерного диска: тензор напряжений редуцируется к двумерному девиатору (любой тензор можно представить в виде суммы шарового тензора и девиатора, где первый в данном случае влияет только на объем, а второй – на изменение формы) в плоскости образца, имеющему одно главное направление, которое и задаёт выделенную ось ориентации диполей.

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1(а). Возбуждение и наблюдение фотолюминесценции осуществлялись по нормали к диску, вдоль оси x . Поскольку статистически независимое излучение ансамбля диполей позволяет считать эллиптичность нулевой и анализировать только линейную поляризацию, возбуждение и регистрация выполнялись через линейные дихроичные поляризаторы P и A с азимутами θ_P и θ_A . Погрешность, вносимая небольшим конструктивным углом $\nu < 3^\circ$ между направлениями возбуждения и наблюдения, находилась за пределами достигнутой чувствительности и поэтому не учитывалась. Для возбуждения ПФЛ использовался узкополосный светодиод XPGDRY-L1-0000-00601 (Royal Blue S-Line, CREE Inc.) с центральной длиной волны 451 нм и шириной спектральной линии 18 нм. Наблюдение ПФЛ осуществлялось с помощью CMOS-камеры, работающей в линейном режиме, с установленным перед объективом (f/1.8) long-pass фильтром (> 530 нм). Модель диска изготавливалась литьём на грубую матовую поверхность полиуретана PN 9743 (Altropol Kunststoff GmbH) с добавлением флуоресцентного красителя Solvent Green 5 (CAS: 2744-50-5) в концентрации ≈ 1 ммоль/л.

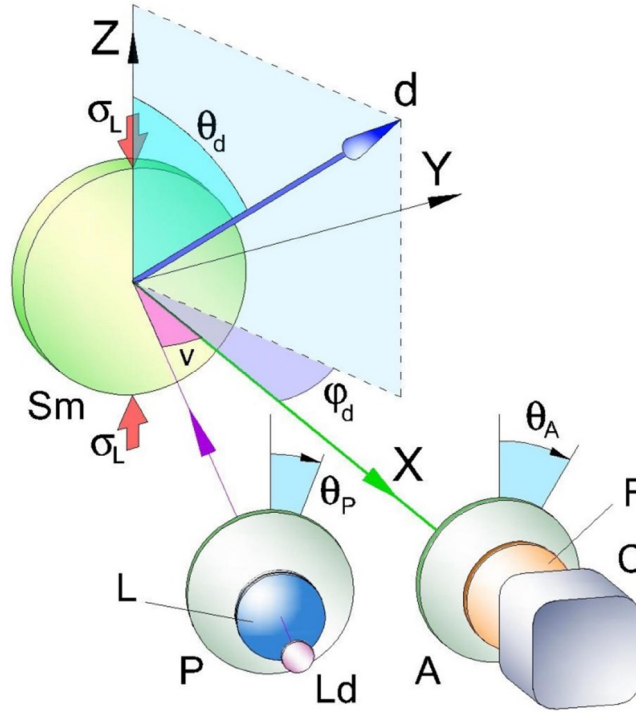


Рис. 1: Схема эксперимента: Ld – LED источник, L – линза, P – поляризатор с азимутом θ_P , Sm – образец, $d(\phi_d, \theta_d)$ – ось диполя, A – анализатор с азимутом θ_A , F – спектральный фильтр, C – камера, σ_L – диаметрально приложенная нагрузка; поверхность образца Sm находится в плоскости zy .

Расчет фотолюминесценции от диполей. Обозначим ось единичного диполя как $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z) = (\sin \theta_d \cos \varphi_d, \sin \theta_d \sin \varphi_d, \cos \theta_d)$, $|\mathbf{d}| = 1$ (см. рис. 1). Направление возбуждения $(-1, 0, 0)$, наблюдения: $\mathbf{k} = (1, 0, 0)$, тогда линейная поляризация возбуждающего света, создаваемая поляризатором P , окажется в плоскости yz , с единичным вектором $\mathbf{e}_p(\theta_p) = (0, \sin \theta_p, \cos \theta_p)$, а собственная ось анализатора A , с вектором $\mathbf{e}_a(\theta_a) = (0, \sin \theta_a, \cos \theta_a)$. В эксперименте мы синхронно сканируем по азимутам $\theta_{p,a}$ оба эти элемента: и P , и A , устанавливая $\theta_a = \theta_p + \delta$. Регистрируемая интенсивность ПФЛ от одного диполя будет пропорциональна произведению, $I_d(\theta_p|\mathbf{d}) \propto (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_p)^2 [1 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2] (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_a)^2$, где $W_{\text{exc}} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_p)^2$ – вероятность возбуждения диполя; $W_{\text{rad}} = [1 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{k})^2]$ – характеризует угловое распределение излучения диполя в направлении \mathbf{k} ; $W_a = \cos(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_a)$ – описывает вклад анализатора для данной ориентации диполя. Обратим внимание, что зависимость от θ_p содержится только в скалярных произведениях с $\mathbf{e}_{p,a}$. Соответственно, они представляют собой линейные

комбинации, составленные из $\sin \theta_p$ и $\cos \theta_p$ с коэффициентами, из компонент \mathbf{d} , так: $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_{p,a})^2 = (d_y \sin \theta_{p,a} + d_z \cos \theta_{p,a})^2 = d_y^2 \sin^2 \theta_{p,a} + d_z^2 \cos^2 \theta_{p,a} + 2d_y d_z \sin \theta_{p,a} \cos \theta_{p,a}$. То есть это многочлены по $\sin \theta_p, \cos \theta_p$ степени не выше 2, а произведение $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_p)^2 (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_a)^2$ не содержит степени выше 4, так что

$$I_d(\theta_p | \mathbf{d}) = \sum c_{mn}(\mathbf{d}, \delta) \cos^m \theta_p \sin^n \theta_p, \quad (1)$$

где коэффициенты c_{mn} зависят только от \mathbf{d} и δ , но не от θ_p . Таким образом, согласно выражению (1) для одиночного диполя с направлением \mathbf{d} и синхронного сканирования, интенсивность как функция θ_p – конечный многочлен по $\sin \theta_p, \cos \theta_p$ степени ≤ 4 .

Понижая степени m, n в (1) и учитывая симметрию $I_d(\theta_p | \mathbf{d}) = I_d(\theta_p + \pi | \mathbf{d})$, то есть период по θ_p равен π , в этом разложении остаются только чётные m, n , имеем:

$$I_d(\theta_p | \mathbf{d}) = C_0(\mathbf{d}, \delta) + C_{2c}(\mathbf{d}, \delta) \cos 2\theta_p + C_{2s}(\mathbf{d}, \delta) \sin 2\theta_p + \\ + C_{4c}(\mathbf{d}, \delta) \cos 4\theta_p + C_{4s}(\mathbf{d}, \delta) \sin 4\theta_p, \quad (2)$$

– чётный ряд по гармоникам с фиксированными базисными функциями 1, $\cos 2\theta_p, \sin 2\theta_p, \cos 4\theta_p, \sin 4\theta_p$. Геометрия эксперимента и ориентации диполя содержатся только в коэффициентах $C_*(\mathbf{d}, \delta)$.

Теперь необходимо учесть распределение ориентаций диполей $W(d)$ на единичной сфере. В отсутствие механических напряжений материал изотропен, и направления диполей равновероятны. По мере роста напряжений в каждой точке диска возникает преимущественная ориентация. Для её описания удобно использовать симметричное бимодальное распределение Фишера [22]:

$$W_{\kappa,n}(\mathbf{d}) = \frac{\kappa}{8\pi \sinh \kappa} \cosh[\kappa(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})], \quad (3)$$

где κ – параметр концентрации (обратная дисперсия), \mathbf{n} – ось ориентации. При увеличении κ оси диполей всё сильнее концентрируются вдоль направления $\pm \mathbf{n}$; при $\kappa = 0$ распределение становится равномерным. Выражение (3) удовлетворяет условию аксиальной симметрии диполя, $W(\kappa, n; d) = W(\kappa, -\mathbf{n}; \mathbf{d})$.

Наблюдаемая интенсивность ПФЛ при поляризованном азимуте θ_p имеет вид

$$I(\theta_p) \propto \int I_d(\theta_p | \mathbf{d}) W(\mathbf{d}) d\Omega, \quad (4)$$

где интегрирование ведётся по телесному углу $d\Omega = \sin \theta_d d\theta_d d\phi_d$; $0 \leq \theta_d \leq \pi$; $0 \leq \phi_d \leq 2\pi$, а относительный азимутальный сдвиг принят $\delta = \pi/4$, тогда $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_a)^2 = \alpha_0 +$

$\alpha_c \cos 2\theta_a + \alpha_s \sin 2\theta_a$, где $\alpha_0 = (d_y^2 + d_z^2)/2$, $\alpha_c = (d_z^2 - d_y^2)/2$, $\alpha_s = d_y d_z$, получаем $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_a)^2 = \alpha_0 + \alpha_s \cos 2\theta_p - \alpha_c \sin 2\theta_p$ и, следовательно, в выражении (4) содержится только один азимут θ_p .

Подставляя аналитическое выражение для $I_d(\theta_p|d)$ и группируя члены по базисным функциям $\{1, \cos 2\theta_p, \sin 2\theta_p, \cos 4\theta_p, \sin 4\theta_p\}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\theta_p) &\propto \int I_d(\theta_p|\mathbf{d})W(\mathbf{d})d\Omega = \\ &= \int C_0(\mathbf{d})W(\mathbf{d})d\Omega + \cos 2\theta_p \int C_{2c}(\mathbf{d})W(\mathbf{d})d\Omega + \\ &+ \sin 2\theta_p \int C_{2s}(\mathbf{d})W(\mathbf{d})d\Omega + \cos 4\theta_p \int C_{4c}(\mathbf{d})W(\mathbf{d})d\Omega + \sin 4\theta_p \int C_{4s}(\mathbf{d})W(\mathbf{d})d\Omega = \\ &= A_0 + A_{2c} \cos 2\theta_p + A_{2s} \sin 2\theta_p + A_{4c} \cos 4\theta_p + A_{4s} \sin 4\theta_p, \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_* = \int C_*(d, \delta)W(d)d\Omega$ – коэффициенты, усреднённые по распределению ориентаций.

Выражение (4) содержит только четыре гармоники чётного порядка. Это напрямую связано (i) с тем, что исходное выражение для интенсивности является многочленом по $\sin \theta_p$ и $\cos \theta_p$ не выше четвёртой степени, и (ii) с периодичностью по θ_p с периодом π , обусловленной аксиальной симметрией диполя. Интегрирование по $d\Omega$ действует только на коэффициенты $C_*(d, \delta)$, не меняя набора базисных функций по θ_p .

Теперь введем $y(\theta_p) \equiv I(\theta_p) - A_0$ и примем азимуты $\theta_p \in (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$; тогда мы получаем линейную систему:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(\pi/6) \\ y(\pi/3) \\ y(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{2c} \\ A_{2s} \\ A_{4c} \\ A_{4s} \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{A}, \quad (6)$$

где матрица \mathbf{M} хорошо обусловлена, $\det \mathbf{M} = 3$. Обращая систему, получаем единственные коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} 2A_{2c} &= y(0) - y(\pi/2), \quad 2A_{4c} = y(0) + y(\pi/2), \\ 6A_{2s} &= \sqrt{3}[y(0) + 2y(\pi/6) + 2y(\pi/3) + y(\pi/2)], \\ 6A_{4s} &= \sqrt{3}[-y(0) + 2y(\pi/6) - 2y(\pi/3) + y(\pi/2)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Значение A_0 удобно получать без нормировки общей интенсивности в тракте простым усреднением интенсивности ПФЛ: $4A_0 = I(0) + I(\pi/4) + I(\pi/2) + I(3\pi/4)$, где используется два дополнительных азимута $\theta_p = (\pi/4, 3\pi/4)$. Поскольку для этих четырёх азимутов средние значения гармоник $\cos 2\theta_p, \sin 2\theta_p, \cos 4\theta_p, \sin 4\theta_p$ обращаются в нуль. В качестве примера на рис. 2 представлены карты коэффициентов A_* , полученных при экспериментальном испытании диска по схеме, показанной на рис. 1. В дополнительных материалах приведено короткое видео, построенное по выражению (5) и демонстрирующее изменение интенсивности ПФЛ при полном обороте $\theta_p \in [0, 2\pi]$, хотя сама интенсивность $I(\theta_p)$ имеет период π .

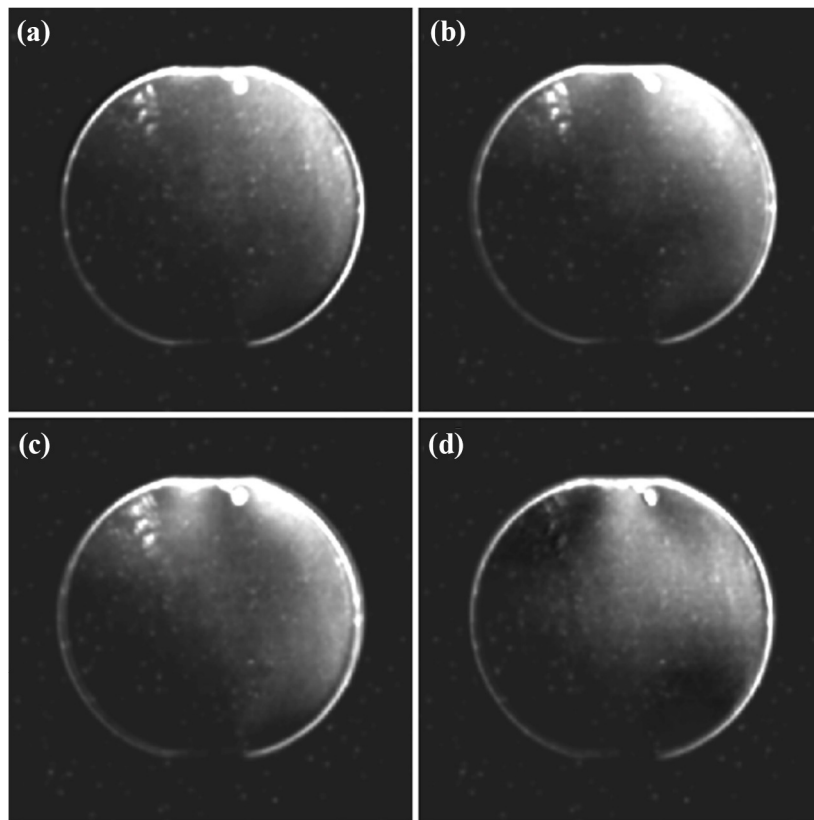


Рис. 2: Двумерные поля коэффициентов разложения ПФЛ в плоскости YZ образца: (a) A_{2c} ; (b) A_{4c} ; (c) A_{2s} и (d) A_{4s} , полученные из эксперимента с диаметрально сжатым полиуретановым диском по схеме рис. 1.

Связь фотолуминесценции с параметром порядка. Для введения редуцированной связи между ориентационным параметром порядка и девиаторной мерой напряжённого состояния мы используем локальную модель типа Ландау [23–25]. Здесь мы явно полага-

ем, что в изотропной среде направление тензора порядка Q_{ij} совпадает с направлением девиаторной части тензора напряжений $\Sigma'_{ij} = \Sigma_{ij} - \frac{1}{3}\Sigma_{kk}\delta_{ij}$ [26–30]. С помощью второго инварианта $J_2^{1/2} = (\Sigma'_{ij}\Sigma'_{ij})^{1/2}$ можно получить нормированный девиатор $D_{ij} = \Sigma'_{ij}/J_2^{1/2}$ (удовлетворяющий условию: $D_{ij}D_{ij} = 1$), который задаёт только ориентацию. В такой аппроксимации тензор порядка представляется в виде $Q_{ij} = SD_{ij}$, где используется скалярный параметр порядка S , описывающий величину ориентационного упорядочения, то есть вся зависимость от напряжений сводится к скалярной функции $S(J_2^{1/2})$. Подчеркнём, что в настоящей работе данная связь используется лишь как феноменологическая интерпретация ориентационного отклика, идентификация материальных коэффициентов модели и переход к восстановлению абсолютных напряжений по данным ПФЛ остаются предметом дальнейших исследований.

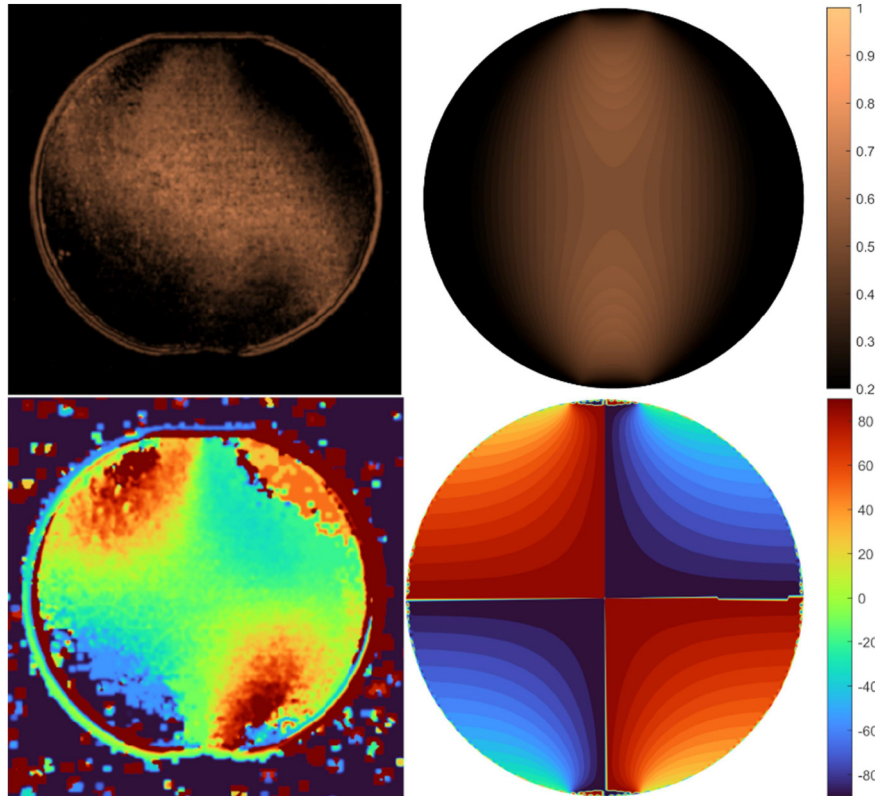


Рис. 3: Вверху показаны экспериментальные (слева) и теоретические (справа) поля параметра (S); внизу – соответствующие поля направлений директора θ_n в плоскости диска uz , полученные экспериментально (слева) и теоретически (справа). Экспериментальные результаты получены с использованием коэффициентов разложения, представленных на рис. 2.

Локальную свободную энергию записываем в минимальной форме Ландау с линейной связью между девиатором напряжений и тензором порядка: $f(S; J_2^{1/2}) = \frac{a}{2}S^2 + \frac{b}{4}S^4 - \Lambda J_2^{1/2}S$, где $a > 0$ и $b > 0$ – параметры Ландау, а Λ – коэффициент связи “напряжение–параметр порядка”. Минимизация f по S дает локальное уравнение состояния $\frac{\partial f}{\partial S} = aS + bS^3 - \Lambda J_2^{1/2} = 0$, то есть кубическое уравнение: $aS + bS^3 = \Lambda J_2^{1/2}$. Последнее позволяет определять скалярный параметр порядка $S(x, y)$ как нелинейную функцию от инварианта девиаторных напряжений. В пределе малых напряжений (слабой связи) это соотношение сводится к линейной зависимости $S \approx (\Lambda/a)J_2^{1/2}$, а при возрастании нагрузки нелинейный член bS^3 приводит к насыщению S . Ориентационно-статистическая интерпретация этого параметра порядка естественно формулируется через аксиальное распределение Фишера–Уотсона (3) для направлений диполей, а скалярный параметр порядка $2S = \langle 3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})^2 - 1 \rangle$ имеет однозначное соответствие параметру концентрации κ .

В эксперименте непосредственно измеряется не S , а угловая зависимость интенсивности поляризованной люминесценции $I(\theta_p)$ согласно (5). Представляя её в виде гармонического разложения $I(\theta_p) = A_0 + \text{Re}\{H_2e^{-i2\theta_p} + H_4e^{-i4\theta_p}\}$, выделяем комплексную амплитуду второй гармоники $H_2 = A_{2c} + iA_{2s}$. Тогда, параметр порядка и направление определяется как:

$$S = |H_2|, \quad \theta_n = 1/2 \arg H_2. \quad (8)$$

В используемой оптической геометрии H_2 представляет собой линейный функционал проекции тензора порядка Q_{ij} на плоскость наблюдения и монотонно связана с параметром порядка S Ландау. На рис. 3 показаны теоретические и экспериментально полученные поля S и направления α . Обе теоретические картины рассчитаны с учетом конечной площади приложения сжимающего усилия [31].

Заключение. Предложенная в работе экспериментальная схема и алгоритм реконструкции обеспечивают переход от качественного наблюдения поляризованной фотолюминесценции к минимальному набору количественных параметров поляризационного отклика, извлекаемых по шести измерениям. Показано восстановление угловой зависимости интенсивности ПЛ и её разложение по гармоникам, что позволяет получать по полю изображения распределение степени поляризации, а также производные из неё распределения скалярного параметра порядка и поля направлений в плоскости образца. Тем самым сформирована компактная и практически применимая схема эксперимента для количественного сравнения анизотропии ПФЛ в условиях сложного напряжённого состояния. Отметим, что, хотя задача восстановления тензора напря-

жений в настоящей работе не решается, получаемые поля могут быть использованы для анализа пространственной неоднородности напряжённо-деформированного состояния, мониторинга изменений при релаксации и циклических воздействиях, а также для выявления областей с повышенной анизотропией, потенциально соответствующих концентраторам напряжений и т. п.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00552, <https://rscf.ru/project/24-29-00552/>.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] J. R. Lakowicz, *Principles of Fluorescence Spectroscopy*, 3rd ed. (Springer, New York, 2006).
- [2] R. F. Steiner, *Fluorescence Anisotropy: Theory and Applications* (Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002).
- [3] J. Michl, E. W. Thulstrup, *Spectroscopy with Polarized Light: Solute Alignment by Photoselection in Liquid Crystals, Polymers, and Membranes* (VCH Publishers, New York, 1986).
- [4] E. W. Thulstrup, J. Michl, *Elementary Polarization Spectroscopy* (VCH Publishers, New York, 1989).
- [5] D. Magde, *J. Chem. Phys.* **68**, 3717 (1978).
- [6] A. Ansari, A. Szabo, *Biophys. J.* **64**, 838 (1993). DOI:10.1016/S0006-3495(93)81445-0.
- [7] В. В. Кесаев, А. Н. Лобанов, С. А. Амбросевич, *Краткие сообщения по физике ФИАН* **50**(7), 31 (2023). DOI: 10.3103/S1068335623070060.
- [8] M. Grell, D. D. C. Bradley, *Adv. Mater.* **11**, 895 (1999). DOI: 10.1002/(SICI)1521-4095(199908)11:11<895::AID-ADMA895>3.0.CO;2-Y.
- [9] A. P. Davey, R. G. Howard, W. J. Blau, *J. Mater. Chem.* **7**, 417 (1997). DOI: 10.1039/A605405F.
- [10] C. Weder, C. Sarwa, C. W. M. Bastiaansen, P. Smith, *Polymer Prepr.* **38**, 404 (1997).
- [11] A. J. Bur, S. C. Roth, *Proc. Annu. Tech. Conf. Soc. Plastics Eng. (ANTEC)* (1998).
- [12] A. Montali, C. Bastiaansen, P. Smith, C. Weder, *Nature* **392**, 261 (1998). DOI: 10.1038/32616.
- [13] J. P. Hubner, P. G. Ifju, K. S. Schanze, et al., *Exp. Mech.* **44**, 416 (2004). DOI: 10.1007/BF02428095.
- [14] S. Krause, M. Neumann, M. Fröbe, et al., *ACS Nano* **10**, 1908 (2016). DOI: 10.1021/acsnano.5b05729.
- [15] E. Schaub, B. Ahammou, J.-P. Landesman, *Appl. Opt.* **61**, 1307 (2022). DOI: 10.1364/AO.449825.

- [16] D. T. Cassidy, S. K. K. Lam, B. Lakshmi, D. M. Bruce, *Appl. Opt.* **43**, 1811 (2004). DOI: 10.1364/AO.43.001811.
- [17] D. T. Cassidy, J.-P. Landesman, *Appl. Opt.* **59**, 5506 (2020). DOI: 10.1364/AO.394624.
- [18] R. A. Forman, G. J. Piermarini, J. D. Barnett, S. Block, *Science* **176**, 284 (1972). DOI: 10.1126/science.176.4032.284.
- [19] X. Wang, “Photoluminescence piezo-spectroscopy method for measurement of residual stresses,” in *Encyclopedia of Thermal Stresses*, R. B. Hetnarski, ed. (Springer, Dordrecht, 2014), pp. 3682–3690.
- [20] M. Xu, Z. Xu, M. A. Soto, et al., *Adv. Mater.* **35**, 2301060 (2023). DOI: 10.1002/adma.202301060.
- [21] В. В. Кесаев, В. А. Барбашов, Н. А. Путилин и др., *Письма в ЖТФ* **51**(8), 58 (2025). DOI: 10.61011/PJTTF.2025.08.60166.20190.
- [22] T. Hillen, K. J. Painter, A. C. Swan, A. D. Murtha, *Math. Biosci. Eng.* **14**, 673 (2017). DOI: 10.3934/mbe.2017038.
- [23] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, 3rd ed. (Pergamon Press, Oxford, 1980).
- [24] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, 3rd ed. (Pergamon Press, Oxford, 1986).
- [25] P.-G. de Gennes, J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, 2nd ed. (Clarendon Press, Oxford, 1993).
- [26] E. M. Terentjev, *J. Phys.: Condens. Matter.* **11**, R239 (1999). DOI: 10.1088/0953-8984/11/24/201.
- [27] M. Warner, E. M. Terentjev, *Liquid Crystal Elastomers* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [28] E. Fried, S. Sellers, *J. Mech. Phys. Solids* **52**, 1671 (2004). DOI: 10.1016/j.jmps.2003.12.005.
- [29] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969).
- [30] R. B. Hetnarski, J. Ignaczak, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed. (CRC Press, Boca Raton, Fla., 2010).
- [31] К.-М. Hung, С.-С. Ма, *Exp. Mech.* **43**, 216 (2003). DOI: 10.1007/BF02410502.

Поступила в редакцию 15 декабря 2025 г.

После доработки 7 апреля 2026 г.

Принята к публикации 12 мая 2026 г.