

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 532.517.4

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ
В РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИА. В. Копьев¹, А. С. Ильин^{1,2}, В. А. Сирота¹, К. П. Зыбин^{1,2}

Обнаружено аномальное поведение парных пространственно-временных корреляций поля скорости в стационарном турбулентном потоке Навье-Стокса, сгенерированном численно в кубической области с периодическими граничными условиями. Показано, что корреляционные функции на всех масштабах (в том числе и вязком) убывают с увеличением временного сдвига обратно пропорционально временному сдвигу даже на временах в несколько раз больших времени оборота самого крупного вихря, на которых разумно предполагать экспоненциальное затухание. В случае если эта зависимость не обрывается на еще больших временных сдвигах, не достигнутых в исследуемом счете, найденная аномалия означает, что корреляционное время логарифмически расходится и, значит, является бесконечным. Посчитанное на достаточно большом конечном временном сдвиге корреляционное время показывает линейный скейлинг с пространственным сдвигом, связанный с так называемым эффектом выметания мелкомасштабной турбулентности крупными масштабами (“sweeping effect”).

Ключевые слова: развитая турбулентность, корреляционное время, эйлеровы корреляторы скорости, колмогоровская теория, турбулентный перенос.

¹ ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: koryev@lpi.ru.

² Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Россия, Москва, ул. Мясницкая, 20.

Введение. Построение теории турбулентности из первых принципов уже долгое время остается одним из камней преткновения теоретической физики. Основания теории были заложены Колмогоровым в его знаменитых работах еще в 1941 году. В одной из этих работ [1] в предположении о локальной статистической изотропии течения им был посчитан пространственный двухточечный третий коррелятор приращений скорости, спроецированный на радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$, соединяющий две точки (продольный):

$$\langle \delta v_L^3 \rangle = \left\langle \left((\mathbf{v}_{(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)} - \mathbf{v}_{(\mathbf{r},t)}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \right)^3 \right\rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon \cdot \rho,$$

где ε – мощность диссипации энергии. Усреднение $\langle \dots \rangle$ подразумевается по ансамблю реализаций, но обычно заменяется на усреднение по \mathbf{r} , ввиду предполагаемых статистической однородности и пространственной эргодичности. Для компактности записи зависимость от нескольких аргументов обозначается нижним индексом здесь и далее.

В работах [2, 3] Колмогоровым и Обуховым была построена феноменологическая теория турбулентности и найдено пространственное поведение коррелятора второй степени $\langle \delta v_L^2 \rangle \propto (\varepsilon \cdot \rho)^{2/3}$, отвечающего за спектральное распределение энергии. Согласно теории Колмогорова–Обухова турбулентное течение представляет собой неравновесную систему, энергия в которую поступает на больших масштабах. Затем энергия каскадным образом без диссипации переходит во все меньшие масштабы, пока не рассеивается в тепло на вязком масштабе $r_v = \nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$, где ν – кинематическая вязкость [4]. Последующие исследования потребовали уточнения феноменологии, поскольку статистические свойства реальной турбулентности не описываются теорией Колмогорова–Обухова. Тем не менее, для исследования моментов малых порядков с высокой точностью можно пользоваться колмогоровскими представлениями [5].

Построение фундаментальной теории, основанной исключительно на уравнениях движения, сталкивается с серьезными трудностями. Последовательный вывод уравнений для старших одномоментных двухточечных корреляций приводит к бесконечной цепочке зацепляющихся нелокальных уравнений [6]. Самым простым способом расщепления цепочки является предположение о связи четвертых и вторых корреляций через теорему Вика (гипотеза Миллионщикова [7]). Несмотря на весьма ограниченную применимость гипотезы в реальной турбулентности, оказалось, что во многих случаях она не приводит к серьезным ошибкам (подробный обзор см. в книге [8]). В рамках гипотезы можно вывести замкнутое уравнение для пространственно-временного второго

коррелятора (автокорреляционной функции приращений скорости) [9]:

$$\psi_{(\rho, \delta t)} = \left\langle \left((\mathbf{v}_{(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t+\delta t)} - \mathbf{v}_{(\mathbf{r}, t)}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \right)^2 \right\rangle. \quad (1)$$

Его поведение при больших временах в рамках гипотезы оказывается степенным $\psi_{(\rho, \delta t)} \propto 1/\delta t^2$. Слабое (степенное) затухание представляется неправдоподобным; для неравновесной системы с накачкой и затуханием более естественным представляется экспоненциальное затухание. Является ли этот результат следствием неправомерности гипотезы Миллионщикова?

В настоящей работе на примере анализа данных численных симуляций изотропной турбулентности в кубической области с периодическими граничными условиями [10, 11] показано, что затухание пространственно-временных корреляций во времени в реальной турбулентности еще слабее, чем в предположении гипотезы Миллионщикова. Оказывается, что оно близко к $1/\delta t$ на всем доступном в счете временном диапазоне, то есть как минимум на четырех интегральных временных масштабах. Более того, поведение $1/\delta t$ оказывается справедливым, в том числе, на вязких пространственных масштабах, где можно ожидать экспоненциального затухания на значительно меньших временах. В случае если зависимость $1/\delta t$ продолжается на всей временной оси, это означает логарифмическую расходимость корреляционного времени эйлерового поля скорости, определенного по площади автокорреляционной функции.

Формальное определение эйлерового и квазилагранжевого корреляционных времен. В теории случайных процессов корреляционным называют время, через которое стохастическая система “забывает” о своем прошлом (декоррелирует). Формальное определение корреляционного времени дается через нормированный интеграл от корреляционной функции второго порядка [8]:

$$\tau_c^{(E)}(\rho) = \frac{1}{\psi_{(\rho, 0)}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \psi_{(\rho, s)} ds. \quad (2)$$

Несмотря на то, что уравнения гидродинамики имеют наиболее естественный вид в эйлеровой системе координат, в теории турбулентного переноса (например, при расчете эффективных коэффициентов турбулентного переноса [12, 13]) нужно также рассматривать корреляции скорости в системе отсчета лагранжевой частицы [14]:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_{(\mathbf{r}(t), t)}.$$

Двухточечные корреляции с фиксированным (эйлеровым) смещением в этой системе координат обычно называют квазилагранжевыми [15]:

$$\psi_{(\rho, \delta t)}^{(qL)} = \left\langle \left(\mathbf{v}_{(\mathbf{r}(t)+\rho, t+\delta t)} - \mathbf{v}_{(\mathbf{r}(t), t)} \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \right\rangle^2.$$

Точка, относительно которой рассматриваются пространственные сдвиги, зависит от времени t , и именно этим такая корреляционная функция отличается от эйлеровой. Корреляционное время в этой системе отсчета определяется аналогично (2):

$$\tau_c^{(qL)}(\rho) = \frac{1}{\psi_{(\rho, 0)}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \psi_{(\rho, s)}^{(qL)} ds.$$

Нормировка в определении квазилагранжевого корреляционного времени производится на $\psi_{(\rho, 0)}$, поскольку ввиду эргодичности и несжимаемости

$$\psi_{(\rho, 0)}^{(qL)} = \psi_{(\rho, 0)}.$$

Важно отметить, что в теории турбулентности именно корреляционное время, определенное через интеграл, является количественной мерой эффекта памяти процесса и влияет, например, на процессы турбулентного переноса. Более естественное с точки зрения экспериментатора характерное время затухания автокорреляций (скажем, в 2 раза), не входит напрямую в выражения для кинетических коэффициентов. Заметим также, что времена, посчитанные из корреляционных функций более высоких порядков, могут также проявлять себя ввиду мультипликативной природы турбулентного переноса [16] и отражать нетривиальные свойства перемежаемости самого турбулентного течения [17]. Цель настоящей работы состоит в анализе эйлерового корреляционного времени (2).

Феноменология и эффект выметания (sweeping) турбулентности. В отличие от одномоментных корреляторов эйлеровы и квазилагранжевы корреляционные времена, вообще говоря, различны. Эйлерово время с точки зрения феноменологии совпадает со временем, за которое вихрь пролетает мимо неподвижного датчика и определяется не физикой вихря, а эффектом выметания турбулентности крупномасштабными вихрями с среднеквадратичной скоростью v_{rms} . Поэтому

$$\tau_c^{(E)}(\rho) \propto \frac{\rho}{v_{rms}}. \quad (3)$$

Квазилагранжево время является истинным динамическим временем жизни вихря. Оно определяется характерным временем оборота вихря соответствующего масштаба, то есть

$$\tau_c^{(qL)}(\rho) \propto \frac{\rho}{\sqrt{\langle \delta v_l^2(\rho) \rangle}} \propto \frac{\rho^{2/3}}{\varepsilon^{1/3}}. \quad (4)$$

Заметим, что полученные феноменологические оценки отражают время затухания автокорреляционной функции, но ничего не говорят о характере этого затухания, который и является предметом настоящей работы.

Параметры турбулентности в прямом численном моделировании. Численное моделирование трехмерных уравнений Навье–Стокса с крупномасштабной накачкой (постоянная плотность жидкости взята единичной)

$$\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (\nabla \mathbf{v}) = 0$$

проводилось в работах [10, 11] в периодическом кубе $\mathbf{r} = (x, y, z) \in [0, 2\pi]^3$ на сетке размером 1024^3 с использованием псевдоспектрального параллельного кода. Накачка \mathbf{f} моделировалась как статистически стационарное случайное воздействие в пространстве Фурье на волновых числах $k \leq k_f = 2$ для поддержания постоянной общей энергии в этих модах. Интегрирование по времени вязкого члена выполнялось в фурье-пространстве, остальные члены интегрировались с помощью схемы Адамса–Бэшфорта второго порядка. Подробности касательно численной схемы можно найти в [10, 11].

Т а б л и ц а 1

Параметры турбулентности

ε	ν	v_{rms}	L	Re_λ	T_L	$r_\nu = \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4}$	$\lambda = \sqrt{15 \nu v_{rms}^2 / \varepsilon}$	$t_\nu = \sqrt{\nu / \varepsilon}$
0.0928	$1.85 \cdot 10^{-4}$	0.681	1.376	433	2.02	$2.87 \cdot 10^{-3}$	0.118	$4.46 \cdot 10^{-2}$

Примечание: ε – мощность диссипации, ν – кинематическая вязкость, v_{rms} – среднеквадратичная скорость, L – интегральный масштаб, Re_λ – тейлоровское число Рейнольдса, T_L – время оборота крупного вихря, r_ν – колмогоровский масштаб диссипации, λ – тейлоровский масштаб, t_ν – время обращения вязкого вихря.

Представленные в базе данные позволяют отслеживать эволюцию турбулентного потока с тэйлоровским числом Рейнольдса $Re_\lambda = 433$ в течение пяти характерных времен

оборота крупномасштабного вихря $T_L \sim 1/v_{rms}k_f$. В табл. 1 представлены числовые значения параметров симулированной турбулентности.

Вычисление эйлерового времени по расчетной области. Для вычисления корреляций (1) из численных данных использовался метод случайных направлений, предложенный нами в [18]. Он заключается в выборе 1 миллиона случайных точек из массива $[0, 2\pi]^3$ и одного случайного изотропно-распределенного независимого направления для каждой такой точки, вдоль которого берутся парные точки. Эта процедура позволяет полностью исключить из статистики анизотропную крупномасштабную компоненту (которая присутствует даже для периодических граничных условий) за счет усреднения по ансамблю ориентаций. При этом было рассмотрено 24 пространственных и 18 временных сдвигов распределенных логарифмически от вязких до интегральных масштабов.

Вычисление корреляционного времени проводилось по разностной аппроксимации формулы (2) методом трапеций. Мелкость разбиения менялась адаптивно вдоль отрезка интегрирования в соответствии с меняющимся темпом изменения производных. Полученная зависимость корреляционного времени от масштаба в логарифмических осях представлена на рис. 1.

Видно, что в инерционном интервале имеет место именно линейная зависимость корреляционного времени от масштаба в согласии с (3). Для описания перехода в интегральный масштаб хорошо подходит аппроксимация [19]:

$$\tau_c^{(E)}(\rho) \propto \frac{\rho}{\sqrt{L^2 + c\rho^2}}. \quad (5)$$

Коэффициент c зависит от способа определения L и взят нами равным 0.4. Аппроксимация (5) также приведена на рис. 1.

Логарифмическая расходимость эйлерового времени. Численное интегрирование (2) может быть произведено только в конечной области, поэтому подразумевает сходимость интеграла от $\psi_{(\rho,s)}$. На рис. 2 представлена зависимость (в логарифмических осях) продольной корреляционной функции (1) от времени при различных значениях расстояний: от вязкого масштаба $\sim 2.1r_v$ до размеров расчетной области.

Видно, что для очень больших расстояний корреляции затухают сравнительно медленно вплоть до нескольких интегральных масштабов времени (за время T_L затухание примерно в 2 раза). Фактически расчетной области в несколько времен оборота крупного вихря не хватает, чтобы выявить характер затухания при больших r , но ясно, что затухание корреляций происходит дольше ожидаемого. Резкое убывание этих кор-

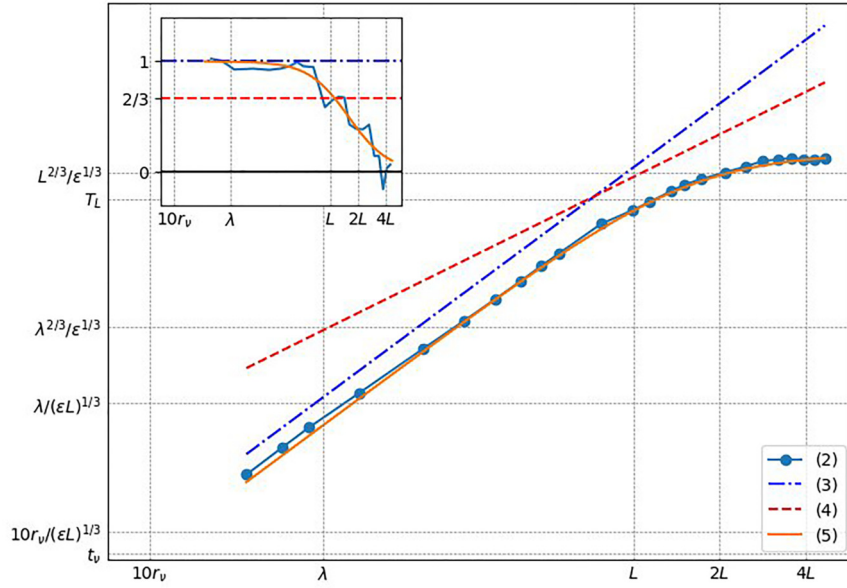


Рис. 1: Зависимость $\tau_c^{(E)}(\rho)$ в логарифмических осях. Синими точками отмечены результаты численного интегрирования, оранжевой линией – аппроксимация (5), синей и красной пунктирными линиями – наклоны, соответствующие (3) и (4). На вставке изображены логарифмические производные.

реляционных функций на временах, превышающих в несколько раз T_L , мы обсудим в заключении.

Мелкомасштабные ($\sim 2.1r_v$) корреляции демонстрируют слабое затухание $\propto 1/t$ и ненулевое присутствие вплоть до интегрального масштаба времени ($\sim T_L$). Поскольку корреляции на этих временах оказываются очень малы, для их измерения становятся ощутимы любые погрешности. Это в особенности проявляется в логарифмических осях (так, отрицательные значения корреляций невозможно отразить на логарифмической шкале, и они изображены вертикальной чертой).

Поэтому особенно интересным является поведение временных корреляций на тейлоровских масштабах ($\sim 1.3\lambda$), где корреляции достаточно велики на всем рассматриваемом временном диапазоне. Зависимость $\propto 1/t$ здесь проявляется от нескольких вязких масштабов времени до четырех интегральных (это где-то два порядка). Таким образом, интеграл (2) может вообще формально расходиться. Хотя утверждать о расходимости, основываясь исключительно на численном счете, мы не можем, ясно, что эйлерово корреляционное время значительно превышает лагранжево, которое исследовалось в [17].

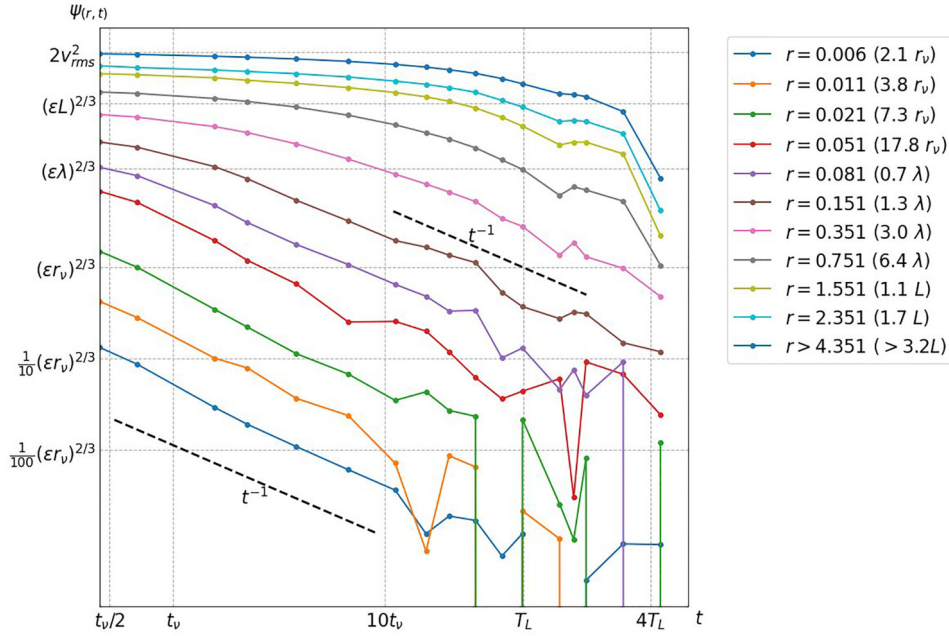


Рис. 2: Зависимость $\psi_{(r,t)}$ от t при различных r (см. легенду справа).

Характерный провал всех корреляционных функций на временах $\sim T_L$ связан, как нам кажется, с прямым воздействием накачки, которую в численном расчете выбирают локализованной на этих временах [10, 11]. Полученные нами результаты показывают, что систематические корреляции в течении не пропадают и на временах больших времени корреляции накачки.

Заключение. Обнаружено аномально слабое затухание временных корреляций эйлеровых пульсаций скорости (1), $\propto 1/\delta t$. Если экстраполировать эту зависимость за расчетную область, то это означает бесконечность эйлерова корреляционного времени (2) (в отличие от квазилагранжевого, для которого корреляционные функции ведут себя экспоненциально).

Проиллюстрировать полученное поведение можно следующей аппроксимацией автокорреляционной функции (1)

$$\frac{\psi_{(\rho,\delta t)}}{\psi_{(\rho,0)}} = \begin{cases} e^{-\delta t/\tau}, & \delta t < \tau, \\ e^{-1} \cdot \tau/\delta t, & \delta t > \tau, \end{cases} \quad (6)$$

где время $\tau = \tau(\rho)$ порядка феноменологического времени (3). Тогда корреляционное время (2) равно $\tau_c^{(E)} = \tau \cdot (1 - e^{-1} + e^{-1} \ln T/\tau)$, где T – максимальное время наблюдения. Таким образом, корреляционное время (2) логарифмически велико, а характерным

временем затухания автокорреляционной функции является феноменологическое время пролета вихря мимо неподвижного наблюдателя (3).

Стоит отметить, что экспоненциальное затухание корреляторов на больших временных сдвигах можно ожидать как следствие разрушения наиболее крупных вихрей системы. Динамика этих вихрей определяется крупномасштабной накачкой, поддерживающей энергию низких гармоник. Резкое убывание крупномасштабных корреляторов на временах порядка $4T_L$ (см. рис. 2) объясняется существенной перестройкой этих гармоник, что при дальнейшем увеличении δt должно приводить к выходу на экспоненциальный режим затухания. Более высокие гармоники, мажорированные этим поведением, в таком случае также перейдут в режим экспоненциального затухания. Однако причина обнаруженного нами поведения $\propto 1/\delta t$ на столь значительных временных интервалах остается неизвестной и требует дополнительных исследований.

Важность различия корреляционных времен в теории турбулентного (транспорта) подчеркивается в нашей недавней работе [19], посвященной турбулентному динамо, где показано, что использование именно квазилагранжевых характеристик обеспечивает корректную связь между теорией и численными экспериментами. Это позволяет точно предсказывать критические параметры системы, такие как порог турбулентного динамо. Применение квазилагранжевых корреляций для описания турбулентного переноса скалярной примеси позволяет исследовать случай малых чисел Шмидта и применить разработанную ранее V3 модель [20], чтобы оценить влияние каскадных процессов на крупномасштабную диффузию.

Работа АВК выполнена при поддержке гранта РФФ 24-72-00068. Авторы благодарны Агафонцеву Д. С. и Кичатинову Л. Л. за плодотворные обсуждения результатов работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **32**(1), 19 (1941). DOI: 10.1098/rspa.1991.0076.
- [2] А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**(4), 299 (1941). DOI: 10.1098/rspa.1991.0075.
- [3] А. М. Обухов, Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. **5**(4), 453 (1941).
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, 5-е издание (М., ФИЗМАТЛИТ, 2006).
- [5] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова* (М., ФАЗИС, 1998).

- [6] R. J. Hill, *J. Fluid Mech.* **434**, 379 (2001). DOI: 10.1017/S0022112001003949.
- [7] М. Д. Миллионщиков, *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.* **5**(4), 433 (1941).
- [8] А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика. Часть 2* (М., Наука, 1967).
- [9] S. Chandrasekhar, *Proc. R. Soc. Lond. A* **229**(1177), 1 (1955). DOI: 10.1098/rspa.1955.0070.
- [10] Y. Li, E. Perlman, M. Wan, et al., *J. Turbul.* **9**, N31 (2008). DOI: 10.1080/14685240802376389.
- [11] E. Perlman, R. Burns, Y. Li, C. Meneveau, Data exploration of turbulence simulations using a database cluster. In: *Proceedings of the 2007 ACM/IEEE Conference on Supercomputing (SC07)* (Reno, Nevada, USA, ACM, 2007), Article 50, pp. 1–11. DOI: 10.1145/1362622.1362683.
- [12] L. L. Kichatinov, *Journal of Fluid Mechanics* **208**, 115 (1989). DOI: 10.1017/S002211208900279X.
- [13] Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokoloff, *The Almighty Chance* (World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 20) (World Scientific, Singapore, 1990).
- [14] G. K. Batchelor, *J. Fluid Mech.* **5**(1), 113 (1959). DOI: 10.1017/S002211205900009X.
- [15] V. S. L'vov, E. Podivilov, I. Procaccia, *Phys. Rev. E* **55**(6), 7030 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevE.55.7030.
- [16] А. С. Ильин, А. В. Копьев, В. А. Сирота, К. П. Зыбин, *УФН* **195**(8), 794 (2025). DOI: 10.3367/UFNe.2025.03.039940.
- [17] L. Biferale, E. Calzavarini, F. Toschi, *Phys. Fluids* **23**(8), 085107 (2011). DOI: 10.1063/1.3623466.
- [18] А. В. Коруев, К. П. Зыбин, *J. Turbul.* **19**(9), 717 (2018). DOI: 10.1080/14685248.2018.1511055.
- [19] А. В. Коруев, А. С. П'ун, V. A. Sirota, K. P. Zybin, *Astron. Astrophys.* **708**, A165 (2026). DOI: 10.1051/0004-6361/202558806.
- [20] А. В. Коруев, А. С. П'ун, V. A. Sirota, K. P. Zybin, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **527**(1), 1055 (2024). DOI: 10.1093/mnras/stad3191.

Поступила в редакцию 21 апреля 2026 г.

После доработки 5 мая 2026 г.

Принята к публикации 6 мая 2026 г.