

ОПТИКА И ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 535.12

ПАРАКСИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К БЕЗЛИНЗОВОЙ
КОГЕРЕНТНОЙ ОПТИКЕ

И. А. Артюков, А. В. Виноградов, Н. Л. Попов

Как известно, возникшая во второй половине прошлого века когерентная визуализация (КВ), предлагает альтернативу традиционным оптическим системам формирования изображений. Суть методики – математическая обработка дифракционных картин предмета, помещённого в когерентный пучок. При этом не используются фокусирующие оптические элементы и системы. Набор необходимых инструментов может сводиться к источнику когерентного излучения, матричному приёмнику, и компьютеру, выполняющему численные расчёты. Таким образом, отпадает нужда в дорогостоящих оптических приборах. Более того, КВ характеризует объект не только по модулю поля прошедшей волны, но и по её фазе. Указанные очевидные достоинства стимулируют научно-исследовательские и инженерные работы, направленные на совершенствование метода в целях его практического применения. В настоящей работе показывается, что параксиальный подход позволяет применять метод КВ не только к падающим на образец плоским волнам, но и к когерентным зондирующим пучкам произвольной поперечной структуры. Это упрощает требования к источникам излучения и расширяет возможности практической реализации. Сформулированы условия применимости такого подхода.

Ключевые слова: когерентная визуализация, восстановление фазы, оптика тонких плёнок.

1. *Введение.* Раскрытие и описание внутренней структуры некристаллического объекта по его дифракционной картине является предметом целого ряда новых технологий [1–4]. Следуя духу обзоров [2] и [3], для их обозначения будем использовать термин когерентная визуализация, включая сюда когерентную дифракционную визуализацию¹ (КДВ) и птихографию. Эти технологии объединяет отсутствие совершенных оптических элементов (линз, зеркал, зонных пластинок и пр.) и систем, используемых обычно для получения изображений высокого разрешения. Набор необходимых инструментов в случае КДВ может сводиться к источнику когерентного излучения, цифровому квадратичному приёмнику, регистрирующему дифракционную картину, и компьютеру, обеспечивающему применение специальных алгоритмов решения “коэффициентных” обратных задач².

Во многих приложениях КДВ результатом первого этапа обработки экспериментальных данных является распределение амплитуды (модуля и фазы) ЭМ волны, прошедшей объект, вблизи его поверхности. Вторым этапом и главной целью является определение комплексной диэлектрической проницаемости объекта $\varepsilon(x, y, z)$. Естественно, по одному или нескольким измерениям интенсивности получение 3D информации об объекте невозможно. Поэтому прибегают к использованию априорных данных и моделей объекта.

В качестве такой базовой модели в работе [5] был рассмотрен однородный диэлектрический слой с резкими границами, преобразующий падающую на него плоскую монохроматическую волну. Полное её описание в рамках уравнений Максвелла хорошо известно [6]. Практической целью в таком случае является определение параметров слоя: толщины l и оптических констант материала, то есть величины $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Входными параметрами служат падающее поле от известного калиброванного источника и поле на обратной стороне слоя, восстановленное по показаниям детектора на первом этапе (см. выше). Измеряемый, как их отношение, комплексный коэффициент пропускания T в общем случае согласно [6], зависит от трёх вещественных параметров: $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и kl , где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, λ – длина волны. Таким образом, три параметра слоя оказываются связанными двумя соотношениями, соответствующими вещественной и мнимой частям T . Это можно использовать для диагностики плёнок – определении оптических констант – показателей преломления и поглощения при известной толщине l , в отличие, например, от обычных спектрофотометров, применяемых для измерения

¹В зарубежной литературе – coherent diffraction imaging (CDI).

²В общем случае можно говорить о расчёте распределения комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x, y, z)$ исследуемого объекта по значениям ЭМ поля на его границах.

показателя поглощения. Состояние и перспективы практического применения методов когерентной безлинзовой оптики в науке, промышленности и образовании подробно обсуждаются в работах [1, 2, 7, 8].

Говоря о приложениях КДВ, особо выделяют ВУФ и мягкий рентгеновский диапазон (ВУФ-МР). В этом случае практически для всех материалов диэлектрическую проницаемость можно представить в виде:

$$\varepsilon = 1 - \delta + i\beta, \text{ причем } |\delta| \leq 1, \beta \leq 1. \quad (1)$$

Благодаря малости δ и β коэффициент пропускания слоя T принимает вид:

$$T \approx e^{i(\sqrt{\varepsilon}-1)kl} \approx \exp \left\{ -i\frac{\delta}{2}kl - \frac{\beta}{2}kl \right\}. \quad (2)$$

Выражение (2), как и точная формула в [6], даёт два соотношения для трёх параметров слоя $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и kl . Однако в ВУФ-МР диапазоне возникает дополнительное обстоятельство. Действительно, введём фазу ϕ и модуль $|T|$ пропускания:

$$T = e^{i\phi + \ln|T|}. \quad (3)$$

Как следует из (2), в нашем случае ($|\varepsilon - 1| \leq 1$):

$$\phi = -\frac{\delta}{2}kl, \quad \ln|T| = -\frac{\beta}{2}kl \text{ и } \frac{\beta}{\delta} = \frac{\ln|T|}{\phi}. \quad (4)$$

Другими словами, измеряя одновременно интенсивность и фазу прошедшего пучка, мы получаем информацию о диэлектрических свойствах материала независимо от толщины образца.

Более того, в ВУФ-МР-диапазоне из-за определяющего вклада внутренних электронных оболочек величины β и δ с неплохой точностью линейно выражаются через плотность материала и поляризуемости атомов или молекул, которые табулированы и находятся в открытом доступе (см. [9, 10]). Поэтому отношение $\frac{\beta}{\delta}$ не зависит также от плотности материала и равно отношению мнимой и вещественной частей поляризуемости α атомов или молекул исследуемого материала, называемому коэффициентом рассеяния f , и, следовательно:

$$f \equiv \frac{\text{Im } \alpha}{\text{Re } \alpha} = \frac{\ln|T|}{\phi}. \quad (5)$$

Таким образом, в методе КДВ измерение интенсивности прошедшего пучка, сопровождаемое восстановлением фазы, позволяет установить коэффициент рассеяния независимо от толщины образца и его плотности. Благодаря этому в работе [11] было предложено определять атомно-молекулярный состав образца, измеряя коэффициент рассеяния

материала f методом КДВ. К настоящему времени такой подход применяется в материаловедении, молекулярной и биологической химии как на ускорительных источниках ВУФ-МР излучения, так и на высоких гармониках ИК лазеров [11–15].

Изложенный выше подход ко второму этапу КДВ – реконструкция $\varepsilon(x, y, z)$, зная падающее и прошедшее образец комплексные поля (второе, как упоминалось, восстанавливается на первом этапе КДВ), основан на решениях уравнений Максвелла для плоских волн, падающих на одномерный однородный слой. Его обобщение на зондирующие пучки с другой поперечной структурой при строгом рассмотрении требует громоздких выкладок и численных расчётов поля на стороне образца, обращённой к детектору [16–19].

В разделе 2 настоящей работы та же задача вместо уравнений Максвелла решается с помощью параболического волнового уравнения (ПВУ) [20–22], что значительно упрощает рассмотрение падающих пучков произвольной структуры и расширяет круг практических приложений. Особенно важной представляется возможность моделирования экспериментов с гауссовыми пучками, всё более широко применяющимися в разных областях [23]. Условия применимости ПВУ рассматриваются в разделе 3.

2. Параксиальный подход. Чтобы иметь возможность в задачах КДВ работать с пучками произвольной поперечной структуры, перейдём от точного (эллиптического) волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(x, z) E(x, z) = 0 \quad (6)$$

к приближённому (ПВУ):

$$2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 [\varepsilon(x, z) - 1] u = 0, \text{ где } u(x, z) = e^{-ikz} E(x, z). \quad (7)$$

Как и в работе [5], рассмотрим однородный диэлектрический слой с идеально резкими границами (см. рис. 1):

$$\varepsilon(x, z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \leq 0 \text{ и } z \geq l; \\ \varepsilon & \text{при } 0 < z < l. \end{cases} \quad (8)$$

Легко убедиться, что в области $0 < z < l$ решение соответствующего уравнения:

$$2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 [\varepsilon - 1] u = 0 \quad (9)$$

с начальным условием

$$u(x, z = 0) = u_i(x) \quad (10)$$

имеет вид:

$$u(x, z) = e^{\frac{ik(\varepsilon-1)}{2}z} \cdot \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x') \exp \left\{ \frac{ik(x-x')^2}{2z} \right\} dx', \quad 0 < z < l. \quad (11)$$

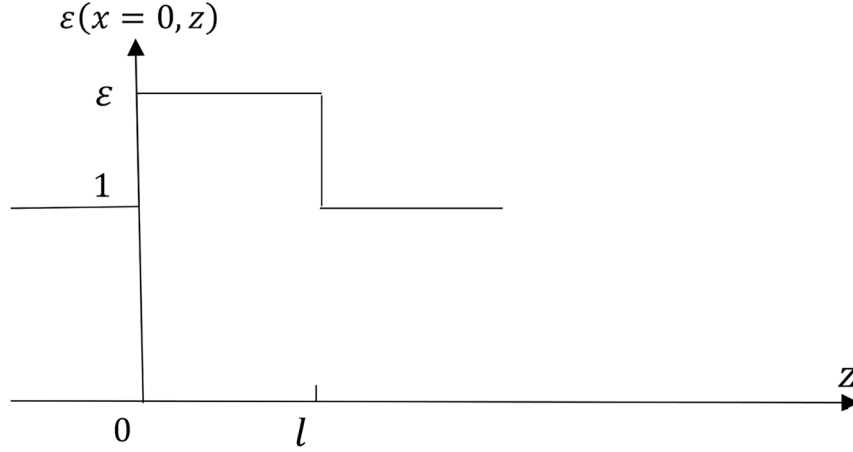


Рис. 1: Диэлектрическая проницаемость слоя толщины l .

Когерентный пучок распространяется вдоль оси z , предмет (диэлектрический слой) и за ним приёмник (на рис.1 не указан) располагаются в плоскости xu .

Формула (11) при $z = l$:

$$u_0(x) = e^{\frac{ik(\varepsilon-1)}{2}l} \cdot \sqrt{\frac{k}{2\pi il}} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x') \exp \left\{ \frac{ik(x-x')^2}{2l} \right\} dx' \quad (12)$$

связывает прошедшее через слой поле $u_0(x)$ с падающим $u_i(x)$ и, следовательно, может быть использована в решении обратной задачи – восстановление параметров слоя ε и l . Выражение (12) является основным результатом данной работы.

Далее с помощью (12) будут рассмотрены прохождение через слой плоской волны и гауссова пучка, а также условия, при которых оно может быть использовано вместо прямого решения точного волнового уравнения (6).

В случае падающей на объект плоской волны согласно (2) и (5) в формулу (11) следует подставить $u_i(x) = 1$. Тогда, интегрируя (12), для поля на обратной стороне объекта $u_0(x) = u(x, z = l)$, которое и создаёт дифракционную картину на приёмнике, получаем:

$$u_0(x) = e^{\frac{ikl(\varepsilon-1)}{2}}. \quad (13)$$

В случае падающего гауссова пучка $u_{GB}(x, z)$ заметим, что второй множитель в (11) есть точное решение параболического уравнения (7) в вакууме ($\varepsilon = 1$) и, очевидно, вместо (12) получаем:

$$u_0(x) = e^{\frac{ikl(\varepsilon-1)}{2}} u_{GB}(x, z = l). \quad (14)$$

Напомним, что в формулах (13) и (14), предназначенных для решения обратной задачи, поле $u_0(x)$ предполагается восстановленным по показаниям приёмника методом КДВ. При этом обратная задача сводится к отысканию параметров плёнки ε и l .

3. Границы применимости. Чтобы исследовать границы применимости параксиального подхода и полученного выше соотношения (12), вернёмся к формуле (13) для плоской волны и запишем, используя (2), приближённое выражение для электрического поля за объектом $\widetilde{E}_0(x)$, соответствующее ПВУ в виде:

$$\widetilde{E}_0(x) = e^{ikl\frac{\varepsilon+1}{2}}. \quad (15)$$

Его следует сравнить с точным соотношением электродинамики:

$$E_0(x) = T e^{ikl}, \quad (16)$$

где T – пропускание плёнки из [6] (для удобства оно приведено в Приложении). При $\varepsilon = 1$ формулы (15) и (16) совпадают и равны, очевидно, e^{ikl} .

Рассмотрим далее оптически мало плотные материалы, что соответствует условию:

$$|\varepsilon - 1| \leq 1. \quad (17)$$

Отметим, что в ВУФ-МР-диапазоне оно справедливо для всех веществ. Сравнивая далее (15) и (16), оценим границы применимости основанного на ПВУ (7) выражения (12) для исследования плёнок из мало плотных материалов.

Введём малый параметр:

$$\Delta = \varepsilon - 1 = -\delta + i\beta, \quad (18)$$

где δ и β – табулированные оптические константы ([9, 10]). Разложим далее $E_0(x)$ по Δ , используя в (16) для пропускания T формулу (П1) в Приложении, и сравним с $\widetilde{E}_0(x)$. Тогда, оставляя лишь главные по Δ члены, получим:

$$E_0(x) = e^{ikl[1+\frac{\Delta}{2}+\frac{1}{16}\Delta^2(e^{2ikl}-3)+\dots]}, \quad (19)$$

$$\widetilde{E}_0(x) = e^{ikl(1+\Delta/2)}. \quad (20)$$

Видно, что линейные по Δ члены в показателях экспоненты совпадают. При этом точное и параксиальное описания будут совпадать, если член, пропорциональный Δ^2 в показателе (19), мал по абсолютной величине. Отсюда получаем условие применимости параксиального подхода:

$$\frac{\Delta^2}{16} \sqrt{[\cos(2kl) - 1]^2 + [\sin(2kl) - 2kl]^2} \ll 1. \quad (21)$$

4. *Выводы.* В работе предложен новый, параксиальный подход к когерентной дифракционной визуализации. Он основан на обобщении параболического волнового уравнения (ПВУ) на случай разрывного (ступенчатого) распределения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x, y, z)$.

Изложенная теория позволяет моделировать прохождение через плёнку зондирующего пучка произвольной поперечной структуры, не прибегая к проекционному приближению (см. [24, 25]). В то же время сохраняется известная привлекательность ПВУ, которое, несмотря на приближённый характер, обеспечивает выполнение закона сохранения энергии.

Параксиальный подход к задаче дифракционной визуализации, строго говоря, применим лишь для оптически мало плотных сред, когда $|\varepsilon - 1| \leq 1$. В видимом и ИК диапазонах это может быть, например, плазма быстрого газового разряда, содержащая микроканалы [26]. Как упомянуто выше, при переходе в ВУФ-МР-диапазон круг доступных сред и материалов значительно расширяется. Важная сторона подхода – применимость к гауссовым пучкам, поскольку они, очевидно, реализуются с меньшими энергозатратами, чем плоские волны.

Используя (21), оценим толщину плёнок кремния, доступных исследованию или контролю с помощью предлагаемой методики. Для зондирующей длины волны 13 нм (рабочий диапазон производства микрочипов) оптические константы Si равны [27]: $\delta = 3.96 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 3.6 \cdot 10^{-3}$. Отсюда из (21) следует, что толщина исследуемой плёнки Si не может превышать 10 мкм.

Таким образом, методы безлинзовой оптики сводят задачу определения оптических констант и толщин однородных плёнок к коэффициентной обратной задаче. Входными данными в ней служат измеренные поперечные распределения поля зондирующего пучка на входе и выходе из объекта. Получить дальнейшую информацию о неоднородности (то есть о трёхмерной структуре) можно только за счёт использования моделей или дополнительного знания.

Авторы признательны И. В. Епатко, А. И. Маслову, А. В. Ускову и Ю. А. Успенскому за обсуждение затронутых в статье вопросов. Мы благодарны также А. С. Бусарову и М. П. Смаеву, прочитавшим рукопись и сделавшим ценные замечания.

Приложение

Следуя [6], запишем пропускание плёнки или плоскопараллельного слоя в виде:

$$T = \frac{(1 - r^2)e^{-i\psi}}{e^{-2i\psi} - r^2} e^{-ikl}, r = \frac{1 - n}{1 + n}, \psi = knl, n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{П1})$$

Раскладывая предэкспоненциальный множитель в (П1) в ряд по $\Delta = \varepsilon - 1$, получаем:

$$T = \left[\frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{2i\psi}} \right] e^{i(\psi - kl)} = \left[1 + \frac{\Delta^2}{16} (e^{2ikl} - 1) + \dots \right] \exp \left\{ ikl \left[\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{8} \Delta^2 + \dots \right] \right\} \quad (\text{П2})$$

или более компактно:

$$T = \exp \left\{ ikl \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{16} (e^{2ikl} - 1 - 2ikl) \right\}. \quad (\text{П3})$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Wang, Q. Zhao, L. Loetgering, et al., Nature Reviews Methods Primers **5**(1), 68 (2025). DOI: 10.1038/s43586-025-00438-3.
- [2] J. Miao, Nature **637**, 281 (2025). DOI: 10.1038/s41586-024-08278-z.
- [3] П. А. Просеков, В. Л. Носик, А. Е. Благов, Кристаллография **66**, 843 (2021). DOI: 10.1134/s1063774521060286.
- [4] Н. Л. Попов, И. А. Артюков, А. В. Виноградов и др., УФН **190**, 766 (2020). DOI: 10.3367/UFNe.2020.05.038775.
- [5] И. А. Артюков, А. В. Виноградов, Н. Л. Попов Квантовая электроника **56**, 197 (2026).
- [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (М., Наука, 1982).
- [7] T. Wang, S. Jiang, P. Song, et al., Biomedical Optics Express **14**, 489 (2023). DOI: 10.1364/BOE.480685.
- [8] J. N. Porter, D. J. Anderson, J. Escobedo, et al., American Journal of Physics **93**, 415 (2025). DOI:10.1119/5.0245088.

- [9] А. В. Виноградов, И. А. Брытов, А. Я. Грудский и др., *Зеркальная рентгеновская оптика* (М., Машиностроение, 1989).
- [10] D. Attwood, *Soft x-rays and extreme ultraviolet radiation: principles and applications* (Cambridge university press, 2000).
- [11] M. W. M. Jones, K. Elgass, M. D. Junker, et al., *Scientific reports* **4**, 6796 (2014). DOI: 10.1038/srep06796.
- [12] D. A. Shapiro, Y.-S. Yu, T. Tyliczszak, et al., *Nature Photonics* **8**, 765 (2014). DOI: 10.1038/nphoton.2014.207.
- [13] C.-T. Liao, Y. H. Lo, J. Zhou, et al., *Microscopy and Microanalysis* **25**, 112 (2019). DOI: 10.1017/S1431927619001296.
- [14] L. Loetgering, S. Witte, J. Rothhardt, *Optics Express* **30**, Issue 3, 4133 (2022). DOI: 10.1364/OE.443622.
- [15] V. Krasnov, I. Makhotkin, J. E. Scheerder, et al., *Optics Express* **32**, Issue 25, 43788 (2024). DOI: 10.1364/OE.535314.
- [16] T. Ooya, M. Tateiba, O. Fukumitsu, *Journal of the Optical Society of America* **65**, Issue 5, 537 (1975). DOI: 10.1364/JOSA.65.000537.
- [17] M. Tanaka, K. Tanaka, O. Fukumitsu, *Journal of the Optical Society of America* **67**, Issue 6, 819 (1977). DOI: 10.1364/JOSA.67.000819.
- [18] R. P. Riesz, R. Simon, *Journal of the Optical Society of America A* **2**, Issue 11, 1809 (1985). DOI: 10.1364/JOSAA.2.001809.
- [19] И. В. Епатко, А. А. Малютин, Р. В. Серов и др., *Квантовая электроника* **25**, 723 (1998). DOI: 10.1070/QE1998v028n08ABEH001308.
- [20] С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин, *Физическая оптика, 2-е изд.* (М., Изд-во Московского ун-та, 2004).
- [21] M. Levy, *Parabolic Methods for Electromagnetic Wave Propagation* (IEE, Padstow, 2000).
- [22] Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников, *Современная оптика гауссовых пучков* (М., Физматлит, 2010).
- [23] V. V. Kotlyar, E. G. Abramochkin, A. A. Kovalev, A. A. Savelyeva, *Photonics* **9**(10), 708 (2022). DOI: 10.3390/photonics9100708.
- [24] D. Paganin, *Coherent X-ray optics* (Oxford University Press, 2006).
- [25] J. A. Pollock, K. S. Morgan, L. C. P. Croton, et al., *Scientific Reports* **12**, 18469 (2022). DOI: 10.1038/s41598-022-19940-9.

- [26] С. Ю. Гаврилов, Е. В. Паркевич, А. И. Хирьянова, Квантовая электроника **55**(2), 116 (2025). DOI: 10.3103/S1068335625602092.
- [27] https://henke.lbl.gov/optical_constants/

Поступила в редакцию 16 июля 2026 г.

После доработки 10 августа 2026 г.

Принята к публикации 13 августа 2026 г.