

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И ЭЛЕКТРОФИЗИКА

УДК 533.95

**НЕЛИНЕЙНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ
СТОЯЧИМИ АЛЬФВЕНОВСКИМИ ВОЛНАМИ
В ДВУХЖИДКОСТНОЙ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ
ПЛАЗМЕ**

С. Ю. Пичугин, Н. Е. Молевич

С использованием теории возмущений второго порядка построена замкнутая система уравнений, описывающая нелинейную динамику стоячих альфвеновских волн в частично ионизованной двухжидкостной плазме. В явном аналитическом виде получены выражения для продольных скоростей ионной и нейтральной компонент, индуцируемых поперечными колебаниями магнитного поля. Учтён вклад нагрева, обусловленного ионно-нейтральным трением. Показано, что индуцированные скорости содержат осциллирующие на удвоенной частоте и постоянные во времени составляющие, затухающие с удвоенным декрементом альфвеновской волны. В низкочастотном пределе полученные двухжидкостные выражения переходят в известные результаты одножидкостного приближения. Работа демонстрирует, что пренебрежение тепловыделением приводит к потере существенных нелинейных эффектов в продольной динамике плазмы.

Ключевые слова: нелинейные стоячие альфвеновские волны, частично ионизованная плазма, двухжидкостная модель, индуцированные продольные течения, ионно-нейтральное трение.

Введение. Изучение нелинейных альфвеновских волн представляет собой одну из фундаментальных задач физики космической и лабораторной плазмы. Особый инте-

Самарский филиал ФИАН, 443011 Россия, Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: theor@fian.smr.ru.

рес эти волны вызывают в связи с их ключевой ролью в процессах нагрева солнечной короны [1, 2], динамики хромосферы и протуберанцев. Если корональная плазма является практически полностью ионизованной, то в более холодных и плотных областях (хромосфера, фотосфера, протуберанцы) плазма оказывается частично ионизованной (ЧИ), что существенно изменяет как дисперсионные свойства волн, так и механизмы их затухания.

В теоретических работах [3, 4] нелинейные альфвеновские волны в ЧИ плазме исследовались в рамках одножидкостной модели, которая предполагает жёсткую связь между ионной и нейтральной компонентами за времена, малые по сравнению с периодом волны. Однако такая модель справедлива лишь при условии, что частота волны значительно ниже эффективной частоты ионно-нейтральных столкновений [5–7]. В общем случае, особенно при высоких частотах, необходимо использовать двухжидкостное описание, в котором ионы и нейтралы рассматриваются как самостоятельные динамические подсистемы, обменивающиеся импульсом и энергией [5–9]. В работе [5] было проведено численное исследование стоячих альфвеновских волн в двухжидкостной плазме, однако аналитические выражения для нелинейно индуцированных продольных скоростей до настоящего времени отсутствовали. Настоящая работа направлена на восполнение этого пробела. Её целью является получение замкнутых аналитических формул для скоростей продольных движений ионов и нейтралов, возбуждаемых стоячей альфвеновской волной, с учётом тепловыделения при столкновениях. Такой подход позволяет не только глубже понять физику нелинейного взаимодействия мод, но и дать верифицируемые соотношения для интерпретации наблюдений и сравнения с численными расчётами.

Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим линейно-поляризованную по оси x стоячую альфвеновскую волну, локализованную на отрезке $-L \leq z \leq L$ в частично ионизованной плазме. Внешнее магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$ направлено параллельно оси z . Пренебрегая зависимостью всех макроскопических величин от координат x и y из полной системы магнитогидродинамических уравнений для двухжидкостной плазмы [9], получаем следующую систему:

$$\rho_i \left(\frac{\partial V_{ix}}{\partial t} + V_{iz} \frac{\partial V_{ix}}{\partial z} \right) = \frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} - \alpha_{in}(V_{ix} - V_{nx}), \quad (1)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial V_{iz}}{\partial t} + V_{iz} \frac{\partial V_{iz}}{\partial z} \right) = -\frac{k_B}{m_i} \frac{\partial(\rho_i T)_i}{\partial z} - \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} - \alpha_{in}(V_{iz} - V_{nz}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i V_{iz})}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial(V_{iz}B_x)}{\partial z} + B_0 \frac{\partial V_{ix}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$C_{Vi}\rho_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + V_{iz} \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) - \frac{k_B T_i}{m_i} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + V_{iz} \frac{\partial \rho_i}{\partial z} \right) = \alpha_{in} \frac{m_n}{m_i + m_n} [(V_{ix} - V_{nx})^2 + (V_{iz} - V_{nz})^2], \quad (5)$$

$$\rho_n \left(\frac{\partial V_{nx}}{\partial t} + V_{nz} \frac{\partial V_{nx}}{\partial z} \right) = \alpha_{in} (V_{ix} - V_{nx}), \quad (6)$$

$$\rho_n \left(\frac{\partial V_{nz}}{\partial t} + V_{nz} \frac{\partial V_{nz}}{\partial z} \right) = -\frac{k_B}{m_n} \frac{\partial(\rho_n T_n)}{\partial z} + \alpha_{in} (V_{iz} - V_{nz}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_n V_{nz})}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$C_{Vn}\rho_n \left(\frac{\partial T_n}{\partial t} + V_{nz} \frac{\partial T_n}{\partial z} \right) - \frac{k_B T_n}{m_n} \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + V_{nz} \frac{\partial \rho_n}{\partial z} \right) = \alpha_{in} \frac{m_i}{m_i + m_n} [(V_{ix} - V_{nx})^2 + (V_{iz} - V_{nz})^2]. \quad (9)$$

Здесь индексы i и n относятся, соответственно, к ионно-электронной и нейтральной компонентам; ρ , T , P – плотность, температура и давление; V_{ix} , V_{nx} и V_{iz} , V_{nz} – поперечные и продольные компоненты скоростей, соответственно; B_x – возмущение магнитного поля; k_B – постоянная Больцмана; C_{Vi} , C_{Vn} – удельные теплоёмкости при постоянном объёме; m_i , m_n – средние молекулярные массы; $\alpha_{in} = \Omega_{in}\rho_i\rho_n$ – коэффициент ионно-нейтрального трения, где Ω_{in} – константа скорости столкновений на единицу массы. При записи (1)–(9) пренебрегалось диссипацией, связанной с вязкостью, конечной проводимостью и теплопроводностью. Система дополняется начальными условиями, соответствующими возбуждению стоячей поперечной волны:

$$V_{ix}(t=0, z) = A_x \cos kz, \quad V_{nx}(t=0, z) = A_x \cos kz, \quad V_{iz}(t=0, z) = V_{nz}(t=0, z) = 0,$$

$$T_i(t=0, z) = T_{i0}, \quad T_n(t=0, z) = T_{n0}, \quad \rho_i(t=0, z) = \rho_{i0}, \quad \rho_n(t=0, z) = \rho_{n0},$$

и граничными условиями жёстких стенок на концах отрезка:

$$V_{ix}(t, z = \pm L) = V_{nx}(t, z = \pm L) = V_{iz}(t, z = \pm L) = V_{nz}(t, z = \pm L) = 0.$$

В работе рассматривается основная мода с волновым числом $k = \pi/2L$.

Метод возмущений и вывод уравнений. Для анализа нелинейных эффектов применим стандартную процедуру теории возмущений, полагая начальные акустические возмущения отсутствующими. Разложим все величины по малому параметру $\varepsilon \ll 1$ вплоть до второго порядка:

$$\rho_i = \rho_{i0} + \rho_{i2}, \quad \rho_n = \rho_{n0} + \rho_{n2}, \quad V_{iz} = V_{iz2}, \quad V_{nz} = V_{nz2}, \quad V_{ix} = V_{ix1} + V_{ix2}, \quad V_{nx} = V_{nx1} + V_{nx2},$$

$$T_i = T_{i0} + T_{i2}, \quad T_n = T_{n0} + T_{n2}, \quad B_x = B_{x1} + B_{x2}, \quad (10)$$

с иерархией малости:

$$V_{ix1}/c_i \sim V_{nx1}/c_n \sim B_{x1}/B_0 \sim \varepsilon, \quad \rho_{i2,n2}/\rho_{i0,n0} \sim T_{i2,n2}/T_{i0,n0} \sim V_{ix2}/c_i \sim V_{nx2}/c_n \sim B_{x2}/B_0 \sim \varepsilon^2, \\ V_{iz2}/c_i \sim V_{nz2}/c_n \sim \varepsilon^2.$$

Здесь c_i, c_n – скорости звука в ионной и нейтральной компонентах. Подстановка разложений (10) в систему (1)–(9) и отделение членов первого и второго порядков малости приводят к системе уравнений (11)–(14). Для поперечной компоненты магнитного поля получаем линейное уравнение третьего порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - c_A^2 \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \right) + v_0 \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (11)$$

где введены обозначения:

$$v_0 = \Omega_{in} \rho_0, \quad \rho_0 = \rho_{i0} + \rho_{n0}, \quad c_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_{i0}}, \quad V_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}.$$

Для продольных скоростей ионов и нейтралов получаются неоднородные волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 V_{iz}}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 V_{iz}}{\partial z^2} + (1 - \eta)v_0 \left(\frac{\partial V_{iz}}{\partial t} - \frac{\partial V_{nz}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{8\pi\rho_{i0}} \frac{\partial^2 B_x^2}{\partial t \partial z} - \frac{(1 - \eta)v_0 k_B m_n}{C_{Vi} m_i (m_i + m_n)} \frac{\partial W_x^2}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 V_{nz}}{\partial t^2} - c_n^2 \frac{\partial^2 V_{nz}}{\partial z^2} - \eta v_0 \left(\frac{\partial V_{iz}}{\partial t} - \frac{\partial V_{nz}}{\partial t} \right) = -\frac{\eta v_0 k_B m_i}{C_{Vn} m_n (m_i + m_n)} \frac{\partial W_x^2}{\partial z}, \quad (13)$$

где $W_x = V_{ix} - V_{nx}$ – относительная поперечная скорость, эволюция которой описывается уравнением

$$\frac{\partial W_x}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\rho_{i0}} \frac{\partial B_x}{\partial z} - v_0 W_x. \quad (14)$$

Здесь $c_i^2 = \gamma \frac{k_B T_{i0}}{m_i}$, $c_n^2 = \gamma \frac{k_B T_{n0}}{m_n}$, $\gamma = \frac{C_{Pi}}{C_{Vi}} = \frac{C_{Pn}}{C_{Vn}}$. $C_{Pi} = C_{Vi} + k_B/m_i$, $C_{Pn} = C_{Vn} + k_B/m_n$ – теплоёмкости ионной и нейтральной компоненты при постоянном давлении, $\eta = \rho_{i0}/\rho_0$ – начальная степень ионизации плазмы.

Уравнения (12), (13) наглядно демонстрируют, что поперечная альфвеновская волна нелинейно возбуждает продольные движения, причём источники включают как помоторный механизм (первый член в правой части (12)), так и тепловой механизм, связанный с диссипацией энергии при столкновениях (вторые члены в правых частях (12) и (13)).

Аналитическое решение для индуцированных продольных скоростей. Рассмотрим случай, когда поперечное возмущение магнитного поля в стоячей волне имеет вид затухающей гармоник:

$$B_x = A_B \exp(-\omega_I t) \sin(\omega_R t) \sin(kz) = A_B \text{Im}[\exp(i\omega t)] \sin(kz), \quad (15)$$

где $\omega = \omega_R + i\omega_I$, причём ω_R – частота, ω_I – временной декремент затухания. Амплитуда A_B связана с начальной амплитудой поперечной скорости A_x соотношением

$$A_B = -\frac{A_x 4\pi\rho_0(\omega_R^2 + \omega_I^2)}{k\omega_R B_0}.$$

В этом случае решение уравнения (14) для поперечной составляющей относительной скорости имеет вид:

$$W_x = \{\exp(-\omega_I t)[A_1 \cos(\omega_R t) + A_2 \sin(\omega_R t)] - A_1 \exp(-v_0 t)\} \cos(kz),$$

где

$$A_1 = -\frac{kA_B B_0}{4\pi\rho_{i0}} \frac{\omega_R}{(v_0 - \omega_I)^2 + \omega_R^2}, \quad A_2 = \frac{kA_B B_0}{4\pi\rho_{i0}} \frac{v_0 - \omega_I}{(v_0 - \omega_I)^2 + \omega_R^2}.$$

Далее мы будем рассматривать установившийся за времена $t \gg 1/v_0$ режим стоячих волн, когда членом $A_1 \exp(-v_0 t)$ в выражении для W_x можно пренебречь. Подстановка (15) в (11) даёт дисперсионное соотношение:

$$\omega(\omega^2 - c_A^2 k^2) - iv_0(\omega^2 - V_A^2 k^2) = 0. \quad (16)$$

В низкочастотной области, где $\omega_R \ll 2\eta(1-\eta)v_0$ и $\omega_I \ll \omega_R$, решение (16) имеет вид:

$$\omega = kV_A + i \frac{k^2 V_A^2 (1-\eta)}{2\eta v_0}.$$

Таким образом, декремент затухания стоячей альфвеновской волны в ЧИ плазме определяется как $\omega_I = \frac{k^2 V_A^2 (1-\eta)}{2\eta v_0}$. Это выражение совпадает с выражением $\omega_I = \eta_{C,0} k^2 / 2$, полученным в [3] с использованием одножидкостной модели, применимой в низкочастотном диапазоне, учитывая, что $\eta_{C,0} = \frac{B_0^2 \rho_{n0}^2}{4\pi \rho_0^2 \alpha_{in0}} = \frac{V_0^2 (1-\eta)}{\eta v_0}$ [6].

Используя (15), вычисляем производные, входящие в правые части (12), (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_x^2}{\partial t \partial z} &= A_B^2 k \exp(-2\omega_I t) [\omega_R \sin(2\omega_R t) + \omega_I \cos(2\omega_R t) - \omega_I] \sin(2kz) = \\ &= -A_B^2 k \text{Re}\{i\omega \exp(2i\omega t) + \omega_I \exp(-2\omega_I t)\} \sin(2kz), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_x^2}{\partial z} &= -k \exp(-2\omega_I t) \left[A_1 A_2 \sin(2\omega_R t) + \frac{A_1^2 - A_2^2}{2} \cos(2\omega_R t) + \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \right] \sin(2kz) = \\
&= -k \exp(-2\omega_I t) \left[A \cos(2\omega_R t + \varphi) + \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \right] \sin(2kz) = \\
&= -k \operatorname{Re} \left\{ \tilde{A} \exp(2i\omega t) + \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \exp(-2\omega_I t) \right\} \sin(2kz), \tag{18}
\end{aligned}$$

где $A = \sqrt{A_1^2 A_2^2 + \frac{(A_1^2 - A_2^2)^2}{4}}$, $\tilde{A} = A \exp(i\varphi)$, $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{2A_1 A_2}{A_2^2 - A_1^2} \right)$.

Общее решение уравнений (12) и (13) будем искать как сумму частных решений и решений однородных уравнений (с нулевой правой частью). Частные решения уравнений (12), (13), соответствующие вынужденным колебаниям, ищем в виде:

$$\begin{aligned}
V_{ig} &= \exp(-2\omega_I t) [A_i \cos(2\omega_R t + \varphi_i) + D_i] \sin(2kz) = \operatorname{Re} \{ \tilde{A}_i \exp(2i\omega t) + D_i \exp(-2\omega_I t) \} \sin(2kz), \\
V_{ng} &= \exp(-2\omega_I t) [A_n \cos(2\omega_R t + \varphi_n) + D_n] \sin(2kz) = \operatorname{Re} \{ \tilde{A}_n \exp(2i\omega t) + D_n \exp(-2\omega_I t) \} \sin(2kz), \tag{19}
\end{aligned}$$

где $\tilde{A}_i = A_i \exp(i\varphi_i)$, $\tilde{A}_n = A_n \exp(i\varphi_n)$. Подставляя (17)–(19) в (12), (13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых временных зависимостях, получаем две независимые системы линейных алгебраических уравнений для комплексных амплитуд $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_n$ (20) и действительных констант D_i , D_n (21):

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_i [-4\omega^2 + 4k^2 c_i^2 + 2i(1 - \eta)\omega v_0] - \tilde{A}_n 2i(1 - \eta)\omega v_0 &= \frac{i\omega k A_B^2}{8\pi\rho_{i0}} + \frac{\tilde{A} k (1 - \eta) v_0 k_B m_n}{C_{Vi} m_i (m_i + m_n)} - \\
-\tilde{A}_i 2i\eta\omega v_0 + \tilde{A}_n [-4\omega^2 + 4k^2 c_n^2 + 2i\eta\omega v_0] &= \frac{\tilde{A} k \eta v_0 k_B m_i}{C_{Vn} m_n (m_i + m_n)}, \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_i [4\omega_I^2 + 4k^2 c_i^2 - 2(1 - \eta)\omega_I v_0] + D_n 2(1 - \eta)\omega_I v_0 &= \frac{\omega_I k A_B^2}{8\pi\rho_{i0}} + \frac{(A_1^2 + A_2^2) k (1 - \eta) v_0 k_B m_n}{2C_{Vi} m_i (m_i + m_n)} \times \\
\times D_i 2\eta\omega_I v_0 + D_n [4\omega_I^2 + 4k^2 c_n^2 - 2\eta\omega_I v_0] &= \frac{(A_1^2 + A_2^2) k \eta v_0 k_B m_i}{2C_{Vn} m_n (m_i + m_n)}. \tag{21}
\end{aligned}$$

Решение систем (20) и (21) даёт искомые амплитуды и фазы продольных скоростей ионов и нейтралов. Общее решение (12), (13) представляет собой сумму найденных частных решений (19) и выражений для продольных скоростей V_{is} и V_{ns} в стоячих акустических волнах, являющихся решением уравнений (12), (13) с нулевой правой частью. Для продольной скорости ионов однородное волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^4 V_{is}}{\partial t^4} - (c_i^2 + c_n^2) \frac{\partial^4 V_{is}}{\partial t^2 \partial z^2} + c_i^2 c_n^2 \frac{\partial^4 V_{is}}{\partial z^4} - v_0 [\eta c_i^2 + (1 - \eta) c_n^2] \frac{\partial^3 V_{is}}{\partial t \partial z^2} + v_0 \frac{\partial^3 V_{is}}{\partial t^3} = 0, \tag{22}$$

и аналогичное уравнение для V_{ns} . Подстановка в (22) $V_{is} \sim \exp(i\omega_s t) \sin(k_s z)$ дает дисперсионное соотношение для акустических мод:

$$\omega_s^4 - (c_i^2 + c_n^2)\omega_s^2 k_s^2 + c_i^2 c_n^2 k_s^4 + i v_0 \omega_s (c_M^2 k_s^2 - \omega_s^2) = 0, \quad (23)$$

где $c_M^2 = \eta c_i^2 + (1 - \eta)c_n^2$, c_M – низкочастотная скорость звука в ЧИ плазме. Начальные условия $V_{iz}(0, z) = V_{nz}(0, z) = 0$ определяют амплитуды собственных акустических мод:

$$\begin{aligned} V_{is} &= \exp(-\omega_{sI} t) [A_{is1} \cos(\omega_{sR} t) + A_{is2} \sin(\omega_{sR} t)] \sin(k_s z), \\ V_{ns} &= \exp(-\omega_{sI} t) [A_{ns1} \cos(\omega_{sR} t) + A_{ns2} \sin(\omega_{sR} t)] \sin(k_s z), \end{aligned} \quad (24)$$

где $k_s = 2k$, а коэффициенты выражаются через параметры частного решения. В низкочастотной области находим из (23): $\omega_{sR} = 2c_M k$, а декремент акустической волны, обусловленный ионно-нейтральными столкновениями, имеет вид:

$$\omega_{sI} = \frac{2k^2(c_i^2 - c_M^2)(c_M^2 - c_n^2)}{v_0 c_M^2}. \quad (25)$$

Выражение (25) совпадает с декрементом, полученным в двухжидкостном приближении в [7]. Отметим, что в одножидкостной модели акустическое затухание за счёт ионно-нейтрального трения отсутствует.

Сравнение с одножидкостной моделью. Для верификации полученных двухжидкостных выражений сопоставим их с результатами одножидкостного приближения [3, 4]. В одножидкостной модели частично ионизованная плазма описывается среднemasсовыми величинами. Продольная среднemasсовая скорость определяется как

$$V_z = \eta V_{iz} + (1 - \eta) V_{nz}. \quad (26)$$

Покажем, что в низкочастотной области двухжидкостные решения (19) для V_{ig} и V_{ng} , а также собственные акустические моды (24), дают в точности решение в одножидкостной модели [3, 4]. Для это перейдем от (12), (13) к уравнению для среднemasсовой скорости. Умножим уравнение (12) на η , уравнение (13) на $1 - \eta$ и сложим друг с другом. При этом столкновительные члены, содержащие разность скоростей $V_{iz} - V_{nz}$, взаимно сокращаются. Учитывая, что в низкочастотной области $\frac{\partial W_x}{\partial t} \ll v_0 W_x$, находим из (14): $W_x = \frac{B_0}{4\pi\eta\rho_0 v_0} \frac{\partial B_x}{\partial z}$. В результате получаем уравнение для среднemasсовой скорости:

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial t^2} - c_M^2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = -\frac{1}{8\pi\rho_0} \frac{\partial^2 B_x^2}{\partial t \partial z} - \frac{(1 - \eta)(\gamma - 1)V_A^2}{4\pi\eta v_0 \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \right)^2. \quad (27)$$

Уравнение (27) в точности совпадает с уравнением, полученным в одножидкостном приближении [3, 4]. Это первый шаг к подтверждению корректности рассматриваемой двухжидкостной модели. Подставим в (27) выражение для поперечного поля (15). Частное решение (вынужденные колебания) ищем в виде

$$V_g = \exp(-2\omega_I t)[A_M \cos(2\omega_R t + \varphi_M) + D_M] \sin(2kz). \quad (28)$$

После подстановки (28) в (27) и, приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках, получаем:

$$\tilde{A}_M = A_M \exp(i\varphi_M) = \frac{A_B^2}{32\pi\rho_0(c_M^2 - \omega^2/k^2)} \left[i\frac{\omega}{k} - \frac{k(1-\eta)(\gamma-1)V_A^2}{\eta v_0} \right], \quad (29)$$

$$D_M = \frac{A_B^2 k V_A^2 (1-\eta)(\gamma-0.5)}{32\pi\rho_0(c_M^2 k^2 + \omega_I^2)\eta v_0}. \quad (30)$$

Решение однородного уравнения:

$$V_s = \exp(-\omega_{sI} t)[A_{s1} \cos(\omega_{sR} t) + A_{s2} \sin(\omega_{sR} t)] \sin(2kz), \quad (31)$$

где $\omega_{sR} = 2c_M k$, ω_{sI} определяется выражением (25), а амплитуды A_{s1} , A_{s2} находятся из начальных условий. Общее решение для среднемассовой скорости есть сумма вынужденного и собственного решений: $V_z = V_g + V_s$. В низкочастотном пределе дисперсионное соотношение (16) даёт:

$$\omega_R = kV_A, \quad \omega_I = \frac{k^2 V_A^2 (1-\eta)}{2\eta v_0} \ll \omega_R. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (29), (30) и (31), получаем общее выражение для V_z . Чтобы сравнить с результатами работы [3], где затухание не учитывалось, рассмотрим предел исчезающего трения ($v_0 \rightarrow \infty$), в котором $\omega_L = 0$, $\omega_{sL} = 0$. В этом пределе из (29), (30) и (31) следует:

$$V_z = \frac{A_x^2 \omega_R^3 \sin(2kz)[\omega_R \sin(2c_M k t) - c_M k \sin(2\omega_R t)]}{V_A^2 (8c_M^3 k^4 - 8c_M k^2 \omega_R^2)}. \quad (33)$$

Выражение (33) в точности совпадает с формулой (87) из работы [3] для среднемассовой продольной скорости в одножидкостном приближении, если учесть, что безразмерная начальная поперечная скорость в [3] равна $v_0 = \frac{A_x}{V_A}$. Таким образом, мы показали, что полученные нами двухжидкостные выражения корректно переходят в выражения одножидкостного приближения при $\omega_R \ll 2\eta(1-\eta)v_0$.

Обсуждение и выводы. В настоящей работе впервые получены замкнутые аналитические выражения для продольных скоростей ионной и нейтральной компонент, нелинейно индуцируемых стоячей альфвеновской волной в ЧИ двухжидкостной плазме. Основные физические результаты состоят в следующем. Во-первых, определена структура индуцированных скоростей. Каждая из продольных скоростей представляет собой суперпозицию трёх слагаемых: осциллирующего на удвоенной частоте (с амплитудой A_i или A_n), постоянного во времени (с величиной D_i или D_n) и собственного акустического отклика. Все вынужденные компоненты затухают с декрементом, вдвое превышающим декремент затухания исходной альфвеновской волны. Во-вторых, продемонстрирована роль нагрева при ионно-нейтральных столкновениях, приводящего к появлению дополнительных источников продольного движения в гидродинамических уравнениях, которые не учитываются в адиабатических моделях. Их относительный вклад растёт с увеличением плотности нейтральной компоненты и может быть существенным в хромосферных условиях. Показано также, что в низкочастотной области двухжидкостные выражения для среднемассовой скорости переходят в известные формулы одножидкостной модели [3]. Это служит дополнительной верификацией полученных результатов и демонстрирует их физическую непротиворечивость.

Полученные уравнения явно показывают, что стоячая альфвеновская волна через квадратичные по полю члены возбуждает продольные течения в ионной и нейтральной жидкостях. Этот механизм может быть эффективным каналом перераспределения энергии между различными модами в ЧИ плазме. Полученные аналитические формулы могут быть непосредственно использованы для интерпретации наблюдений волновых процессов в солнечной хромосфере и протуберанцах, а также для оценки вклада ионно-нейтрального трения в нагрев плазмы. В дальнейшем предполагается обобщение результатов на случай бегущих волн и учёт теплового дисбаланса, связанного с неравновесными процессами ионизации и рекомбинации.

Работа частично поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (государственные задания по темам 0023-2019-0003, FSSS-2023-0009).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] J. F. McLaughlin, I. De Moortel, A. W. Hood, *Astronomy & Astrophysics* **527**, A149 (2011). DOI: 10.1051/0004-6361/201015552.

- [2] S. A. Belov, N. E. Molevich, D. I. Zavershinsky, Phys. Scr. **94**(10), 105605 (2019). DOI: 10.1088/1402-4896/ab2f02.
- [3] J. L. Ballester, R. Soler, J. Terradas, M. Carbonell, Astronomy & Astrophysics **641**, A48 (2020). DOI: 10.1051/0004-6361/202038220.
- [4] J. L. Ballester, Physics **5**, 331 (2023). DOI: 10.3390/physics5020025.
- [5] D. Martinez-Gomez, R. Soler, J. Terradas, The Astrophysical Journal **856**, 16 (2018). DOI: 10.3847/1538-4537/aab156.
- [6] T. V. Zagarashvili, M. L. Khodachenko, H. O. Rucker, Astronomy & Astrophysics **529**, A82 (2011). DOI: 10.1051/0004-6361/201016326.
- [7] N. E. Molevich, S. Yu. Pichugin, D. S. Ryashchikov, Physics of Plasmas **31**, 042115 (2024). DOI: 10.1063/5.0201945.
- [8] Н. Е. Молевич, С. Ю. Пичугин, Д. С. Рящиков, Краткие сообщения по физике ФИАН **48**(7), 11 (2021). DOI: 10.3103/S1068335621070046.
- [9] D. Martinez-Gomez, R. Soler, J. Terradas, The Astrophysical Journal **837**, 80 (2017). DOI: 10.3847/1538-4537/aa5eab.

Поступила в редакцию 14 июля 2026 г.

После доработки 31 августа 2026 г.

Принята к публикации 1 сентября 2026 г.