УДК 538.945

ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА И МАГНИТОСВЯЗАННОГО С НИМ ВОЛНОВОДА

А. С. Малишевский, В. П. Силин, С. А. Урюпин, С. Г. Успенский

Для системы, состоящей из магнитосвязанных джозефсоновского перехода и волновода, даны вихревые решения во всей области скоростей.

В работе [1] были рассмотрены свойства одиночного джозефсоновского вихря в системе, состоящей из джозефсоновского перехода (ДП) и волновода. Эта система состоит из следующих слоев: сверхпроводник S_1, расположенный в области $x < -d$; несверхпроводящий слой I с диэлектрической постоянной ϵ и пренебрежимо малой проводимостью, расположенный в области $-d < x < d$; вслед за этим слоем в области $d < x < L + d$ снова расположен сверхпроводник S_2 толщиной L, после чего следует несверхпроводящий слой волновода W толщиной $2d_w$ с диэлектрической постоянной ϵ_w и пренебрежимо малой проводимостью; и, наконец, сверхпроводник S_3 в области $x > d + L + 2d_w$. При этом в работе [1] было показано, что существуют две области скоростей, в которых возможно свободное движение джозефсоновского вихря. Эти области разделены между собой запрещенной зоной конечной ширины и ограничены со стороны больших скоростей.

В настоящем сообщении для такой системы $S_1\, I\, S_2\, W\, S_3$ приведены аналитические решения, описывающие вихревые структуры в отвечающих им областях значений скоростей свободного движения.

Исходные уравнения для разностей фаз волновых функций на ДП $\varphi(z,t)$ и волноводе $\varphi_w(z,t)$, описывающие вихревые структуры в рассматриваемой нами системе, согласно [1, 2], имеют вид:

$$\omega_j^2 \sin\varphi(z,t) + \frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial z^2} + S V_s^2 \frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial z^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial t^2} = V_{sw}^2 \frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial z^2} + S_w V_{sw}^2 \frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Здесь величины

$$V_s^2 = c^2 \frac{2d}{\epsilon} \frac{2d_w + \lambda(1 + \mathrm{cth}(L/\lambda))}{\Delta},$$

$$V_{sw}^2 = c^2 \frac{2d_w}{\epsilon_w} \frac{2d + \lambda(1 + \mathrm{cth}(L/\lambda))}{\Delta},$$

определяют скорости Свихарта в ДП (V_s) и в волноводе (V_{sw}),

$$\Delta = [2d + \lambda(1 + \mathrm{cth}(L/\lambda))] \times [2d_w + \lambda(1 + \mathrm{cth}(L/\lambda))] - \lambda^2 \mathrm{cosech}^2(L/\lambda).$$

Входящие в правые части уравнений (1) и (2) постоянные связи ДП и волновода имеют вид:

$$S = \lambda \frac{\mathrm{cosech}(L/\lambda)}{2d_w + \lambda(1 + \mathrm{cth}(L/\lambda))},$$

$$S_w = \lambda \frac{\mathrm{cosech}(L/\lambda)}{2d + \lambda(1 + \mathrm{cth}(L/\lambda))}.$$

При записи (1) и (2) использованы обычные обозначения: ω_j – плазменная (джозефсоновская) частота, $\sin\varphi$ – плотность тока Джозефсона, нормированная на критическую плотность тока j_c.

Для стационарных вихревых структур, бегущих с постоянной скоростью v, когда $\varphi(z,t) = \psi(\zeta)$, $\varphi_w(z,t) = \psi_w(\zeta)$, где $\zeta = z - vt$, из уравнений (1) и (2) следует:

$$\omega_j^2 \sin\psi(\zeta) - (V_s^2 - v^2)\psi''(\zeta) = S V_s^2 \psi_w''(\zeta), \tag{3}$$

$$-(V_{sw}^2 - v^2)\psi_w''(\zeta) = S_w V_{sw}^2 \psi''(\zeta). \tag{4}$$

Используя решение уравнения (4)

$$\psi_w''(\zeta) = -S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2} \psi''(\zeta)$$

и подставляя его в уравнение (3), получаем следующее уравнение для разности фаз на ДП:

$$\sin\psi(\zeta) = k_j^{-2}(v)\psi''(\zeta), \tag{5}$$

где

$$k_j^{-2}(v) \equiv \frac{(v_1^2 - v^2)(v_2^2 - v^2)}{(V_{sw}^2 - v^2)\omega_j^2}, \tag{6}$$

а величины v_1 и v_2 определены следующим образом:

$$v_1^2 = \left(V_s^2 + V_{sw}^2 - \sqrt{(V_s^2 - V_{sw}^2)^2 + 4SS_w V_s^2 V_{sw}^2}\right)/2,$$

$$v_2^2 = \left(V_s^2 + V_{sw}^2 + \sqrt{(V_s^2 - V_{sw}^2)^2 + 4SS_w V_s^2 V_{sw}^2}\right)/2.$$

Для анализа следствий уравнения (5) умножим его на $\psi'(\zeta)$ и проинтегрируем по ζ. В результате получим [3]:

$$2\sin^2\frac{\psi(\zeta)}{2} - \frac{1}{2}k_j^{-2}(v)\left[\frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta}\right]^2 = A, \tag{7}$$

где A – постоянная интегрирования, связанная с энергией бегущей вихревой структуры. Ниже рассмотрим следствия уравнения (7).

Прежде всего, остановимся на решениях уравнения в случае, когда $k_j(v)$ – действительная величина, то есть

$$k_j^2(v) > 0. \tag{8}$$

Согласно (6) это возможно тогда, когда скорости движения вихревых структур v находятся в следующих двух ограниченных областях $0 \le v < v_1$ и $V_{sw} < v < v_2$. В отсутствие волновода этот случай отвечает вихрям со скоростями, меньшими скорости Свихарта изолированного ДП.

Предельный случай $A = 0$ отвечает решениям:

$$\psi(\zeta) = 4\mathrm{arctg}\{\exp(\pm k_j(v)\zeta)\}. \tag{9}$$

На фазовой плоскости (ψ', ψ) эти решения отвечают одиночным петлям величиной 2π, а сами решения (9) описывают одиночные элементарные джозефсоновские вихри, которые носят название 2π–кинков. Их свойства для рассматриваемой нами системы, состоящей из связанных ДП и волновода, изучены в работе [1] в тех областях значений скоростей, в которых такие решения существуют.

В случае $A < 0$ из (7) при выполнении условия (8) имеем

$$\frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} = \pm k_j(v)\sqrt{2\left(|A| + 2\sin^2\frac{\psi(\zeta)}{2}\right)},$$

что отвечает так называемым спиральным волнам, когда ψ монотонно возрастает или убывает с ростом ζ. Монотонное изменение ψ происходит по закону:

$$\psi(\zeta) = \pi + 2am(\pm k_j(v)\zeta/k, k). \tag{10}$$

Здесь использовано обозначение $k = \sqrt{2/(2+|A|)}$. Знак плюс в (10) отвечает монотонно растущей функции, а минус – монотонно убывающей.

Если же $0 < A < 2$, то уравнение (7)

$$\frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} = \pm k_j(v)\sqrt{2\left(-A + 2\sin^2\frac{\psi(\zeta)}{2}\right)},$$

отвечает периодическим решениям, которые описывают осцилляции фазы ψ около $\psi = \pi$ по закону

$$\psi(\zeta) = 2\arccos\{\pm k \cdot \mathrm{sn}(k_j(v)\zeta, k)\}, \tag{11}$$

где $k = \sqrt{(2-A)/2}$. Таким образом, формулы (9) – (11) описывают все возможные решения уравнения (7) при выполнении условия (8).

Перейдем теперь к анализу противоположного случая мнимых $k_j(v)$, когда

$$k_j^2(v) < 0.$$

Это возможно тогда, когда скорости v движения вихревых структур находятся в следующих областях: $v_1 < v < V_{sw}$ и $v > v_2$. В этом случае также будет три типа решений [3]. Когда $A > 2$, из (7) следует, что

$$\frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} = \pm|k_j(v)|\sqrt{2\left(A - 2\sin^2\frac{\psi(\zeta)}{2}\right)},$$

что отвечает спиральным волнам, которые описываются формулой

$$\psi(\zeta) = 2am(\pm|k_j(v)|\zeta/k, k), \tag{12}$$

где $k^2 = 2/A$.

В случае $0 < A < 2$ имеют место периодические решения:

$$\psi(\zeta) = -\pi + 2\arccos\{\pm k \cdot \mathrm{sn}(|k_j(v)|\zeta, k)\}, \tag{13}$$

где $k^2 = A/2$. Согласно (13) ψ осциллирует около $\psi = 0$. Наконец, в предельном случае $A = 2$ имеем

$$\psi(\zeta) = -\pi + 4\mathrm{arctg}\{\exp(\pm|k_j(v)|\zeta)\}. \tag{14}$$

Эти решения на фазовой плоскости (ψ', ψ) отвечают петлям величиной 2π между $\psi = -\pi$ и $\psi = \pi$.

Все перечисленные решения заполняют всю область скоростей движения вихревых структур $0 \leq v \leq \infty$, которая, как показано выше, разделена на четыре разрешенных для соответствующих решений зоны. Выписанные здесь решения по форме совпадают с приведенными в [4] (см. также [5, 6]). Отличие заключается, во-первых, в зависимости $k_j(v)$ от скорости v, а во-вторых, и это, по-видимому, главное, в областях значений скоростей, для которых эти решения приведены.

Вопрос об устойчивости вихревых структур, отвечающих решениям (9) – (14) является предметом отдельного обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ НШ-1385.2003.2, МК-1809.2003.02 и в рамках Федеральной целевой научно-технической программы (государственный контракт N 40.012.1.1.1357 от 22.04.2003).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Malishevskii A. S., Silin V. P., and Uryupin S. A. Phys. Lett., A, **306**, N 2 – 3, 153 (2002).

[2] Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М., Наука, 1987.

[3] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.

[4] Lebwohl P. and Stephen M. J. Phys. Rev., **163**, N 2, 376 (1967).

[5] Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., Наука, 1970.

[6] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона: физика и применения. М., Мир, 1984, 640 с.

Поступила в редакцию 23 ноября 2004 г.