УДК 533.951

СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЙ ВКЛАД В НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ В СЛАБОСТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ С ИОНАМИ БОЛЬШОЙ КРАТНОСТИ ИОНИЗАЦИИ

К. Ю. Вагин

Для слабостолкновительной плазмы с ионами большой кратности ионизации изложена кинетическая теория нестационарного возмущения электронной плотности, учитывающего как бесстолкновительное затухание Ландау, так и влияние слабых столкновений электронов на диссипацию энергии возмущений в плазме.

В пределе, когда плазму можно считать бесстолкновительной, диссипация энергии нестационарных возмущений определяется бесстолкновительным механизмом затухания Ландау (см, например, [1]). Учет столкновений частиц приводит к возможности реализации иных механизмов диссипации, обусловленных такими столкновениями. Аналитическая теория слабостолкновительной плазмы с высокой кратностью ионизации в квазистационарном пределе была развита в работах [2 – 4]. В этих работах показано, что при кулоновских столкновениях длина свободного пробега электронов пропорциональна четвертой степени их скорости и в слабостолкновительной плазме всегда присутствует малая группа медленных сильностолкновительных электронов, которые играют определяющую роль в проблематике целого ряда явлений. В работе [3] построена теория квазистационарного возмущения электронной плотности в слабостолкновительной плазме на основе кинетического уравнения для электронов с интегралом столкновений Ландау, учитывающая влияние нелокальных эффектов при парных столкновениях электронов. С другой стороны, в более ранней работе [5] в модели, использующей интеграл столкновений в форме Лоренца, получено выражение для нестационарного вклада в возмущение электронной плотности в слабостолкновительном пределе. Однако выбранная авторами работы [5] модель не позволяет указать точных условий применимости их результата в зависимости от значений параметров плазмы, а также частоты и волнового числа возмущений.

В настоящем сообщении в рамках кинетического подхода изложена последовательная теория нестационарного возмущения электронной плотности в слабостолкновительной плазме с ионами большой кратности ионизации в интервале частот вплоть до частоты, равной произведению волнового числа и тепловой скорости электронов. Выражение для нестационарного возмущения электронной плотности учитывает как бесстолкновительное затухание Ландау, так и влияние слабых столкновений электронов на диссипацию энергии возмущений в плазме. В рамках изложенной теории для параметров плазмы (в том числе величины кратности ионизации ионов), а также частоты и волнового числа возмущений электронной плотности получены условия, определяющие область применимости результатов работ [3, 5].

1. Рассмотрим полностью ионизованную плазму. Вычислим возмущение плотности электронов, вызванное малым возмущением электрического потенциала, зависящим от времени и пространственной координаты следующим образом

$$\delta\varphi \sim e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \tag{1.1}$$

Будем искать функцию распределения электронов в виде

$$f(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = f_M(v) + \delta f(\mathbf{v}) e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

где f_M – равновесная максвелловская функция распределения электронов, а δf – малая поправка к ней, линейная по $\delta\varphi$. Тогда кинетическое уравнение для функции δf может быть записано в виде

$$-i(\omega - \mathbf{kv})\delta f + i(\mathbf{kv})\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2} f_M = J_{ei}[\delta f] + J_{ee}[\delta f]. \tag{1.2}$$

Здесь электрон-ионный интеграл столкновений $J_{ei}[\delta f]$ и частота столкновений $\nu(v)$ электрона, движущегося со скоростью v, определяются выражениями

$$J_{ei}[\delta f] = \nu(v)\frac{\partial}{\partial v_r}\left[(v^2\delta_{rs} - v_r v_s)\frac{\partial}{\partial v_s}\delta f\right], \quad \nu(v) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\nu_{ei}\left(\frac{v_T}{v}\right)^3, \tag{1.3}$$

где частота электрон-ионных столкновений $\nu_{ei} = 4\sqrt{2\pi}e^4 Zn\Lambda/(3m^2v_T^3)$ и введен эффективный заряд ионов $Z = \sum\limits_\alpha Z_\alpha^2 N_\alpha/n$, а суммирование проводится по всем сортам α ионов плазмы. В приведенных формулах e, m, v_T и n – соответственно заряд, масса, тепловая скорость и плотность числа электронов, а Z_α и N_α – кратность ионизации и плотность числа ионов сорта α. $J_{ee}[\delta f]$ – линеаризованный по малому возмущению (1.1) электрон-электронный интеграл столкновений, явный вид которого будет приведен ниже.

Переходя к решению уравнения (1.2), будем считать, что выполнены следующие условия. Во-первых, будем полагать, что эффективный заряд ионов велик по сравнению с единицей

$$Z \gg 1. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) отвечает тому, что частота электрон-электронных столкновений $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}/Z$ оказывается много меньшей частоты электрон-ионных столкновений ν_{ei}. Во-вторых, будем рассматривать слабостолкновительную плазму, в которой характерный пространственный масштаб неоднородности мал по сравнению с длиной свободного пробега $\ell_{ei} = v_T/\nu_{ei}$ основной массы электронов, движущихся с тепловыми скоростями, то есть выполнено условие

$$k\ell_{ei} \gg 1. \tag{1.5}$$

В-третьих, ограничимся рассмотрением сравнительно низкочастотных возмущений, для которых

$$\omega \ll kv_T. \tag{1.6}$$

Запишем функцию δf в виде

$$\delta f = -\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2} f_M + \delta F.$$

Тогда для δF получаем следующее уравнение

$$i(\omega - \mathbf{kv})\delta F + J_{ei}[\delta F] + J_{ee}[\delta F] = i\omega \frac{e\delta\varphi}{mv_T^2} f_M. \tag{1.7}$$

В работах [2 – 4] показано, что благодаря зависимости эффективной частоты столкновений электронов (1.3) от скорости, даже в условиях (1.5) слабостолкновительной плазмы, электроны с малыми скоростями v оказываются сильностолкновительными, если выполнено условие $kv \ll \nu(v)$. Последнее условие может быть переписано в виде

$$v \ll v_C = v_T(k\ell_{ei})^{-1/4} \ll v_T. \tag{1.8}$$

Электроны с малыми скоростями, удовлетворяющими условию (1.8), образуют группу медленных подтепловых электронов в слабостолкновительной плазме [4], движение которых существенным образом определяется столкновениями. Напротив, в области больших скоростей, когда выполнено условие $kv \gg \nu(v)$ (или $v \gg v_C$) столкновения весьма редки и слабо влияют на движение электронов.

Возмущение плотности электронов может быть записано в виде

$$\delta n = \int d\mathbf{v}\delta f = -\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n + \int d\mathbf{v}\delta F = -\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n + \delta n_C + \delta n_T. \tag{1.9}$$

Первое слагаемое в правой части (1.9) отвечает возмущению плотности электронов, приводящему к дебаевской экранировке заряда в плазме, $\delta n_C = \int\limits_{v<v_C} d\mathbf{v}\delta F_C$ – вклад медленных столкновительных электронов в возмущение плотности, а $\delta n_T = \int\limits_{v>v_C} d\mathbf{v}\delta F_T$ – вклад слабостолкновительных тепловых электронов.

2. Рассмотрим вначале уравнение (1.7) в области больших скоростей электронов $v \gg v_C$, для которых выполнено условие слабостолкновительности $kv \gg \nu(v)$. Поскольку в области таких скоростей столкновения электронов редки, то решение (1.7) будем искать по теории возмущений в виде разложения по степеням частоты столкновений электронов. С точностью до линейного слагаемого получаем следующее выражение для δF_T (ср. [1]):

$$\delta F_T(\mathbf{v}) = \frac{\omega}{\omega - \mathbf{kv}}\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}\left\{f_M(v) + iJ_{ei}\left[\frac{f_M(v)}{\omega - \mathbf{kv}}\right]\right\}. \tag{2.1}$$

В (2.1) в соответствии с условием (1.4) пренебрежено малым вкладом, обусловленным электрон-электронными столкновениями.

Выражение (2.1) приводит к следующему диссипативному вкладу тепловых электронов в возмущение плотности (см. ПРИЛОЖЕНИЕ)

$$\delta n_T = -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_T} + \delta n_{T,St}. \tag{2.2}$$

Первое слагаемое отвечает хорошо известному связанному с затуханием Ландау [1] бесстолкновительному вкладу в возмущение плотности электронов, записанному с учетом условия (1.6). Второе слагаемое (2.2) описывает связанный со столкновениями вклад тепловых электронов в возмущение плотности, который вычислен в ПРИЛОЖЕНИИ. Приведем здесь лишь результат.

Для возмущений (1.1) с небольшими частотами $\omega \leq kv_C$ основной вклад в интеграл, определяющий $\delta n_{T,St}$, дают наиболее медленные электроны со скоростями v, близкими к v_C, для которых частота столкновений $\nu(v)$ становится сравнимой с комбинацией $\omega - \mathbf{kv}$, и выражение (2.1) лишь качественно описывает возмущение электронной функции распределения. Поэтому в этом интервале частот справедлива следующая оценка вклада тепловых электронов, связанного с их столкновениями, в возмущение плотности (П.5):

$$\delta n_{T,St} \sim -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\,\frac{\nu_{ei}\omega}{2k^2v_C^2} \approx -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\,\frac{\omega}{2kv_T}\frac{1}{\sqrt{k\ell_{ei}}}. \tag{2.3}$$

Подчеркнем, что для таких небольших частот возмущений ω главным оказывается вклад в мнимую часть $\delta n_{T,St}$. При сравнении (2.3) и первого слагаемого (2.2) видно, что для любых частот $\omega \leq kv_C$ условие слабостолкновительности плазмы (1.5) обеспечивает малость столкновительного вклада тепловых электронов в возмущение плотности по сравнению с их бесстолкновительным вкладом: $(k\ell_{ei})^{-1/2} \ll 1$.

В области больших частот

$$kv_C = \nu_{ei}(k\ell_{ei})^{3/4} \ll \omega \ll kv_T \tag{2.4}$$

основной вклад в интеграл, определяющий $\delta n_{T,St}$, дают электроны со скоростями $v \sim \omega/k \gg v_C$ (см. (П.6)) и

$$\delta n_{T,St} \simeq i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\frac{\nu_{ei}}{2\omega}. \tag{2.5}$$

Отметим, что в интервале частот (2.4) мнимая часть столкновительного вклада быстрых электронов в возмущение плотности, определяемая выражением (П.6), также является главной. В данном частотном интервале отношение столкновительного вклада тепловых электронов (2.5) в возмущение плотности к бесстолкновительному, связанному с затуханием Ландау, всегда мало и определяется выражением $\sim \nu_{ei}kv_T/\omega^2 \sim (kv_C/\omega)^2(k\ell_{ei})^{-1/2} \ll 1$. Таким образом, чем выше частота ω возмущений (1.1), тем меньше влияние столкновений тепловых электронов на возмущение их плотности.

3. Вычислим вклад δn_C в возмущение плотности от столкновительных электронов со скоростями $v \ll v_C$, для которых роль столкновений является определяющей. Столкновения приводят к тому (см. [2 – 4]), что распределение этих электронов по скоростям слабо отличается от изотропного и решение уравнения (1.7) в области скоростей

(1.8) можно представить в виде суммы большого изотропного и малого анизотропного слагаемых

$$\delta F_C(\mathbf{v}) = \left(1 + \frac{\mathbf{kv}}{\omega + 2i\nu(v)}\right)\delta F_0(v),$$

где изотропная часть функции распределения медленных электронов по скоростям δF_0 определяется из уравнения [4]

$$i\left(\omega - \frac{1}{3}\frac{k^2v^2}{\omega + 2i\nu(v)}\right)\delta F_0 + J_{ee}[\delta F_0] = i\omega\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}f_M. \tag{3.1}$$

Остановимся вначале на рассмотрении уравнения (3.1) для относительно медленно меняющейся во времени функции распределения электронов, так чтобы наряду с условием (1.6) и условием столкновительности электронов $kv \ll \nu(v)$ выполнялось условие $\omega \ll 2\nu(v)$. Тогда уравнение (3.1) может быть записано в более простом виде

$$\left(i\omega - \frac{k^2v^2}{6\nu(v)}\right)\delta F_0 + J_{ee}[\delta F_0] = i\omega\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}f_M. \tag{3.2}$$

Согласно [4] для малых скоростей электронов $v \ll v_T$ электрон-электронный интеграл столкновений может быть представлен в простой дифференциальной форме

$$J_{ee}[\delta F_0] = \frac{\nu_{ei}}{Z}\frac{v_T^2}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial \delta F_0}{\partial v}\right).$$

Рассмотрим вначале уравнение (3.2) в пределе, когда влиянием электрон-электронного интеграла столкновений на распределение электронов в области скоростей (1.8) можно пренебречь, что возможно для достаточно высоких частот ω. Тогда решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\delta F_0(v) = \frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}f_M\left(1 + i\frac{k^2v^2}{6\omega\nu(v)}\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

Условие малости вклада электрон-электронного интеграла столкновений в уравнении (3.2) дает следующее условие применимости решения (3.3):

$$\omega \gg \frac{\nu_{ei}}{Z}\frac{v_T^2}{v^2}\left|\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\frac{\partial}{\partial v}\left(1 + i\frac{k^2v^2}{6\omega\nu(v)}\right)^{-1}\right\}\right|.$$

Максимум правой части этого условия достигается для скоростей

$$v \approx v_\omega = v_T \left(9\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_T}\frac{1}{k\ell_{ei}}\right)^{1/5} \ll v_T. \tag{3.4}$$

Для таких скоростей условие применимости решения (3.3) наиболее жесткое и приводит к следующему ограничению снизу на частоту: $\omega \gg \nu_{ei}(k\ell_{ei})^{4/7}/Z^{5/7}$. Таким образом, для нестационарных возмущений (1.1) с относительно большими частотами, удовлетворяющими такому неравенству электрон-электронные столкновения слабо влияют на распределение медленных электронов по скоростям. Соответствующее распределение электронов по скоростям при этом имеет вид (3.3).

С помощью распределения (3.3) вычислим вклад медленных электронов в возмущение плотности

$$\delta n_C = \frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}4\pi\int_0^{v_C} dvv^2 f_M(v)\left(1 + i\frac{k^2v^2}{6\omega\nu(v)}\right)^{-1} \simeq \frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{v_\omega^3}{v_T^3}}\int_0^{v_C/v_\omega}\frac{t^2dt}{1+it^5}, \tag{3.5}$$

где $t = v/v_\omega$ и принято $f_M(v) \cong f_M(0)$.

В условиях, когда выполнено неравенство

$$v_\omega \ll v_C, \tag{3.6}$$

интеграл в (3.5) слабо зависит от верхнего предела и определяется областью значений $t \sim 1$. Это отвечает тому, что распределение медленных электронов характеризуется скоростью $v \sim v_\omega \ll v_C \ll v_T$ и основной вклад в δn_C дают именно такие электроны. Вклад же от электронов со скоростями $v \sim v_C$ на границе области столкновительности в пространстве скоростей в возмущение плотности пренебрежимо мал.

В рамках условия (3.6) для вклада медленных электронов в возмущение плотности (3.5) получаем

$$\delta n_C = a\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\left(\frac{\omega\nu_{ei}}{k^2v_T^2}\right)^{3/5}, \tag{3.7}$$

где комплексный коэффициент $a = 3^{6/5}(2/\pi)^{1/5}\int_0^\infty dtt^2(1+it^5)^{-1} = 3^{6/5}\pi^{-4/5}2^{7/10}5^{-5/4}\times$ $\times\sqrt{\sqrt{5}-1}\exp(-3\pi i/10) \approx 1.33 - 1.82i$. Выражение (3.7) было получено в работе [5] в модели, не учитывающей особенностей интеграла столкновений электронов друг с другом в области скоростей $v \ll v_T$. Последнее не позволило авторам работы [5] указать условия применимости формулы (3.7) в зависимости от значения эффективного заряда ионов, а также частоты и волнового числа возмущений (1.1). Последовательный вывод формулы (3.7), проделанный в настоящей работе, позволяет четко выявить указанные условия.

Условие (3.6) дает следующее ограничение сверху на частоту рассматриваемых возмущений $\omega \ll \nu_{ei}(k\ell_{ei})^{3/4} \equiv kv_C$. Отметим, что это условие автоматически обеспечивает выполнение неравенства $\omega \ll 2\nu(v)$, использованного нами при получении уравнения (3.2), во всей области скоростей (1.8) и, в частности, для электронов с $v \sim v_\omega \ll v_C$.

Оценка (2.3) столкновительного вклада тепловых электронов в возмущение плотности, справедливая в области частот $\omega \ll kv_C$, может быть переписана в виде

$$\delta n_{T,St} \sim -\frac{i}{2}\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\left(\frac{\omega\nu_{ei}}{k^2v_T^2}\right)^{3/5}\left(\frac{\omega}{kv_C}\right)^{2/5}$$

и оказывается всегда много меньше вклада медленных электронов δn_C (3.7).

Таким образом, в интервале частот возмущений

$$\nu_{ei}(k\ell_{ei})^{4/7}/Z^{5/7} \ll \omega \ll \nu_{ei}(k\ell_{ei})^{3/4}, \tag{3.8}$$

возмущение плотности электронов, связанное со столкновениями, в основном определяется медленными столкновительными электронами с $v \sim v_\omega$ и описывается выражением (3.7). В силу условий (1.4), (1.5) интервал (3.8) всегда существует, причем он тем шире, чем больше величина эффективного заряда ионов. Отметим, что вещественная часть выражения (3.7) дает вклад в возмущение плотности электронов, малый по сравнению с первым слагаемым формулы (1.9), так что при дальнейшем рассмотрении мы будем его опускать.

Формула (3.7) применима в пределе не очень малых частот возмущений (см. левое неравенство (3.8)), для которых электрон-электронные столкновения практически не влияют на возмущение распределения электронов по скоростям. Противоположный предел малых частот рассмотрен в работах [3, 4], когда именно электрон-электронные столкновения ответственны за формирование электронного распределения в области малых скоростей (1.8). Полученное в работах [3, 4] в области малых частот

$$\omega \ll \nu_{ei}(k\ell_{ei})^{4/7}/Z^{5/7} \tag{3.9}$$

выражение для вклада в возмущение плотности, обусловленное их столкновениями, в основном определяется медленными электронами со скоростями $v \sim v_T(Zk^2\ell_{ei}^2)^{-1/7} \ll v_C$ и имеет вид

$$\delta n_C = -2.2i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\frac{\omega}{kv_T}\frac{Z^{2/7}}{(k\ell_{ei})^{3/7}}. \tag{3.10}$$

Это выражение описывает вклад в возмущение плотности электронов, обусловленный нелокальными явлениями, связанными с парными столкновениями электронов. Отметим, что условия (1.4) и (1.5) обеспечивают малость выражения (2.3) по сравнению с (3.10) в интервале частот (3.9).

Таким образом, во всей области частот $\omega \ll kv_C$ именно медленные столкновительные электроны определяют вклад в возмущение электронной плотности, связанный со столкновениями. Окончательно, подставляя первое слагаемое формулы (2.2), определяющее вклад тепловых электронов, и выражение (3.7) (либо (3.10)), отвечающее медленным электронам в (1.9), получаем следующее выражение для возмущения плотности электронов, вызванного малым нестационарным возмущением электрического потенциала (1.1)

$$\delta n = -\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\left\{1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_T}\right\} + \delta n_C. \tag{3.11}$$

Здесь первое слагаемое, пропорциональное единице, отвечает возмущению плотности электронов, приводящему к дебаевской экранировке заряда в плазме, второе слагаемое связано с бесстолкновительным затуханием Ландау, третье же слагаемое обусловлено столкновениями электронов и в зависимости от частоты возмущения имеет вид

$$\delta n_C = -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\cdot\begin{cases} 2.2\frac{\omega}{\nu_{ei}}\frac{Z^{2/7}}{(k\ell_{ei})^{10/7}}, & \text{в интервале частот (3.9)},\\ 1.8\left(\frac{\omega\nu_{ei}}{k^2v_T^2}\right)^{3/5}, & \text{в интервале частот (3.8)}.\end{cases}$$

В области больших частот возмущений (2.4), когда условие (3.8) нарушено, но по-прежнему выполнено (1.6), неравенство $\omega \ll 2\nu(v)$ может нарушаться и вместо уравнения (3.2) для возмущения функции распределения медленных электронов необходимо рассматривать более точное уравнение (3.1). Это уравнение позволяет получить следующую оценку сверху для мнимой части вклада в возмущение плотности медленных электронов со скоростями (1.8) в интервале частот (2.4)

$$Im[\delta n_C] \sim -i\frac{3}{4}\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\frac{\nu_{ei}^3}{\omega^3}.$$

Последнее выражение в $\omega^2/\nu_{ei}^2 \sim (k\ell_{ei})^{3/2}(\omega/kv_C)^2 \gg 1$ раз меньше вклада быстрых электронов (2.5), связанного с их столкновениями, и им можно пренебречь. Таким образом, в интервале частот (2.4) основной вклад в мнимую часть возмущения плотности электронов, связанную со столкновениями, дают быстрые электроны со скоростями $v \gg v_C$. Исходя из (1.9), (2.2) и (2.5), получаем следующее выражение для возмущения плотности электронов в электрическом потенциале (1.1), учитывающее влияние столкновений электронов на диссипацию,

$$\delta n = -\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2} n \left\{ 1 + i \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_T} - \frac{\nu_{ei}}{2\omega} \right] \right\}.$$

Отметим, что последнее слагаемое в этом выражении, обусловленное столкновениями электронов, имеет знак, противоположный знаку бесстолкновительного второго слагаемого, связанного с затуханием Ландау, и всегда меньше его по величине, как это показано во втором разделе. Это отвечает тому, что в интервале достаточно высоких частот (2.4) столкновения электронов приводят к некоторому уменьшению бесстолкновительной диссипации. Однако подчеркнем, что это малый эффект, не приводящий к полной компенсации, а главным является бесстолкновительный механизм затухания Ландау. Поэтому лишь в области достаточно низких частот возмущений $\omega \ll kv_C$ столкновения электронов могут приводить к существенному видоизменению диссипации энергии возмущений вида (1.1) по сравнению с традиционно рассматриваемым для бесстолкновительной плазмы затуханием Ландау.

Автор выражает благодарность А. В. Брантову за полезные ссылки на литературу.

Работа выполнена при частичной государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-1385.2003.2) и при поддержке "Фонда содействия отечественной науке".

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим вклад слабостолкновительных электронов, распределение которых по скоростям определяется выражением (2.1), в возмущение плотности

$$\delta n_T = \int\limits_{v>v_C} d\mathbf{v}\delta F_T = \frac{e\delta\varphi}{mv_T^2} \int\limits_{v>v_C} d\mathbf{v} \frac{\omega}{\omega - \mathbf{kv}} \left\{ f_M(v) + iJ_{ei} \left[\frac{f_M(v)}{\omega - \mathbf{kv}} \right] \right\} = \delta n_{T,0} + \delta n_{T,1}. \quad (\text{П}.1)$$

Подчеркнем сразу, что подынтегральное выражение в (П.1) получено для скоростей $v \gg v_C$, для которых столкновения можно учитывать по теории возмущений. Поэтому интеграл (П.1) дает точный количественный ответ для δn_T лишь тогда, когда нижний предел интегрирования слабо влияет на значение интеграла. Тогда же, когда основной вклад в (П.1) связан со значениями скоростей v, близкими к v_C, выражение (П.1) можно использовать лишь для оценок.

Первое слагаемое в подынтегральном выражении (П.1) отвечает нулевому приближению по частоте столкновений электронов с ионами при решении уравнения (1.7) и приводит к следующему вкладу в возмущение плотности электронов.

$$\delta n_{T,0} = -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_T}\begin{cases} 1+O\left(\frac{1}{\sqrt{k\ell_{ei}}}\right), & \text{при } \omega \leq kv_C, \\ \exp\left[-\frac{\omega^2}{2k^2v_T^2}\right] \approx 1, & \text{при } kv_C \ll \omega \ll kv_T. \end{cases} \tag{П.2}$$

Главное слагаемое в $\delta n_{T,0}$ связано с бесстолкновительным затуханием Ландау. Малая же добавка в интервале низких частот $\omega \leq kv_C$, пропорциональная $(k\ell_{ei})^{-1/2} \ll 1$, обусловлена вкладом достаточно медленных электронов со скоростями $v \sim v_C$. При выводе (П.2) учтено (см., напр., [1]), что $(\omega - \mathbf{kv})^{-1} = v.p.[(\omega-\mathbf{kv})^{-1}] - i\pi\delta[\omega - \mathbf{kv}]$, где $\delta[x]$ – дельта-функция.

Второе слагаемое в подынтегральном выражении (П.1), линейное по частоте столкновений электронов, дает следующий вклад в δn_T

$$\delta n_{T,1} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{4}\frac{e\delta\varphi}{m}v_T\nu_{ei}\int\limits_{v>v_C} d\mathbf{v}\frac{i}{\omega-\mathbf{kv}}\frac{\partial}{\partial v_r}\left[\frac{(v^2\delta_{rs}-v_rv_s)}{v^3}\frac{\partial}{\partial v_s}\left(\frac{\omega}{\omega-\mathbf{kv}}f_M(v)\right)\right]. \tag{П.3}$$

Для аккуратного учета сингулярностей в (П.3) будем считать, что $\omega \to \omega + i\Delta$, где $0 < \Delta \ll \omega$. Такой подход отвечает решению начальной задачи с включением возмущения (1.1) в момент времени $t \to -\infty$ (при $\Delta \to 0$) и задает правило обхода полюсов, возникающих в выражении (П.3), и часто используется при вычислении выражений типа (П.3) в пределе слабых столкновений частиц (см., напр., [1]). Тогда

$$\delta n_{T,1} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{4}i\frac{e\delta\varphi}{m}v_T\nu_{ei}\lim_{\Delta\to+0}\int\limits_{v>v_C} d\mathbf{v}\frac{i}{\omega-\mathbf{kv}+i\Delta}\frac{\partial}{\partial v_r}\times$$

$$\times\left[\frac{(v^2\delta_{rs}-v_rv_s)}{v^3}f_M(v)\frac{\partial}{\partial v_s}\left(\frac{\omega+i\Delta}{\omega-\mathbf{kv}+i\Delta}\right)\right] =$$

$$= \frac{3(2\pi)^{3/2}}{4}\frac{e\delta\varphi}{m}v_T\nu_{ei}\lim_{\Delta\to+0}(i\omega-\Delta)\int\limits_{v_C}^{\infty}\frac{dv}{v}\frac{f_M(v)}{k^2v^2}\int\limits_{-1}^{1}dx\times$$

$$\times\left(x-\frac{\omega+i\Delta}{kv}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\left(x-\frac{\omega+i\Delta}{kv}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\frac{\nu_{ei}}{k^2}\lim_{\Delta\to+0}(i\omega-\Delta)\int\limits_{v_C}^{\infty}\frac{dv}{v^3}e^{v^2/2v_T^2}\int\limits_{-1}^{1}dx(1-x^2)\left(x-\frac{\omega+i\Delta}{kv}\right)^{-4}.$$

Используя следующий табличный интеграл $\int\limits_{-1}^{1} dx(1-x^2)[x-(a+ib)]^{-4} = \frac{4}{3}[1-(a+ib)^2]^{-2}$ с положительными параметрами a и b и вводя $\xi = v^2/2v_T^2$, получаем

$$\delta n_{T,1} = -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\frac{\nu_{ei}}{4k^2v_T^2}\lim_{\Delta\to+0}(\omega+i\Delta)\int\limits_{v_C^2/2v_T^2}^{\infty} d\xi e^{-\xi}\left[\xi - \frac{(\omega+i\Delta)^2}{2k^2v_T^2}\right]^{-2}. \quad (\text{П.4})$$

Интеграл, входящий в выражение (П.4), сводится к интегральной показательной функции, свойства которой хорошо изучены (см., напр., [6]). Поэтому приведем лишь конечный результат для вклада в возмущение плотности $\delta n_{T,1}$. В области небольших частот $\omega \leq kv_C$ основной вклад в интеграл (П.4) дает нижний предел интегрирования, отвечающий $v \sim v_C$. Поэтому интеграл (П.4) позволяет получить лишь следующую оценочную формулу

$$\delta n_{T,1} \sim -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\frac{\nu_{ei}\omega}{2k^2v_C^2} \approx -i\frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\frac{\omega}{kv_T}\frac{1}{\sqrt{k\ell_{ei}}}. \quad (\text{П.5})$$

Выражение (П.5) того же порядка, что и малая добавка в (П.2), вызванная столкновениями. Таким образом, в области малых частот $\omega \leq kv_C$ связанный со столкновениями вклад в возмущение плотности тепловых электронов $\delta n_{T,St}$ определяется наиболее медленными электронами со скоростями v, близкими к v_C, и по порядку величины характеризуется выражением (П.5). Подчеркнем, что для таких небольших частот возмущений ω главным оказывается вклад в мнимую часть $\delta n_{T,St}$. В области больших частот $kv_C \ll \omega \ll kv_T$ столкновительный вклад тепловых электронов $\delta n_{T,St}$ полностью определяется выражением (П.4). При этом основной вклад в интеграл, входящий в (П.4), дают электроны со скоростями $v \sim \omega/k \gg v_C(\zeta \sim \omega^2/2k^2v_T^2)$ и для $\delta n_{T,St} = \delta n_{T,1}$ получаем следующую формулу

$$\delta n_{T,St} = \frac{e\delta\varphi}{mv_T^2}n\left(i\frac{\nu_{ei}}{2\omega} + \pi\frac{\nu_{ei}\omega}{4k^2v_T^2}\right). \quad (\text{П.6})$$

Отметим, что в интервале частот $kv_c \ll \omega \ll kv_T$ мнимая часть столкновительного вклада быстрых электронов в возмущение плотности, определяемое выражением (П.5), также является главной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С и л и н В. П., Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.

[2] М а к с и м о в А. В., С и л и н В. П. ЖЭТФ, **103**(1), 73 (1993).

[3] М а к с и м о в А. В., С и л и н В. П. ЖЭТФ, **105**(5), 1242 (1994).

[4] С и л и н В. П. УФН, **172**, N 9, 1021 (2002).

[5] K o c h R. A. and H o r t o n W. Jr. Phys. of Fluids, **18**(7), 861 (1975).

[6] A b r a m o v i t z M. and S t e g u n I. A. Handbook of mathematical functions, National burean of Standarts, 1964.

Поступила в редакцию 16 февраля 2005 г.